



**Lorenzo Mascheroni**  
(1750-1800)

LORENZO MASCHERONI

---

# La Geometria del Compasso

(Nuova edizione)

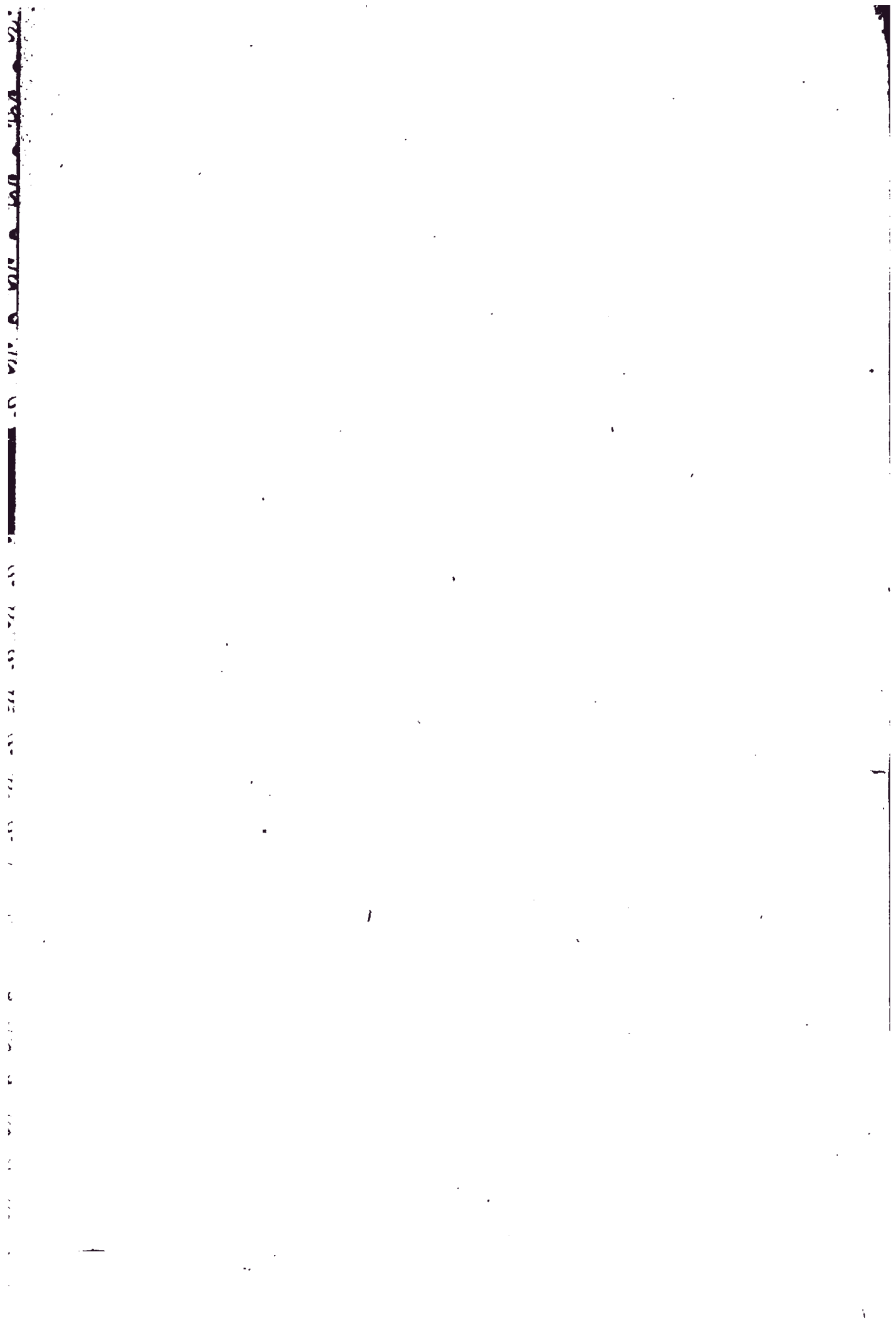


PALERMO

PREM. CASA ED. « ERA NOVA »

1901





## LORENZO MASCHERONI

### e le sue opere matematiche

LORENZO MARIO MASCHERONI DELL'OLMO nacque a Castagneta vicino Bergamo il 13 maggio 1750 da Paolo e da Maria Ceribelli (1). Entrato giovanetto nelle scuole del Seminario di Bergamo, le frequentò fino al 18° anno quale scolaro laico, riscotendo sempre il plauso dei suoi maestri e pel suo ingegno e per la sua diligenza: nel 1768 vestì l'abito di chericò e 6 anni dopo fu ordinato sacerdote.

Non ancora ventenne si volé dai suoi biografi ch' Egli succedesse nella cattedra di retorica nel medesimo Seminario al suo maestro Ottavio Bolgeni: il 5 agosto del 1773 venne nominato per lo stesso insegnamento nel *Collegio Mariano*, ove erano le scuole pubbliche di Bergamo.

In questo periodo di tempo coltivò l'amena letteratura, ed è nel suo 26° anno quando volse la sua vasta e profonda mente agli studi della filosofia e della matematica. Egli stesso solea dire che i primi passi nello studio della scienza esatta gli costarono non poca fatica; ma con la pazienza e l'acutezza del suo ingegno vinse felicemente tutte le difficoltà. E nel 1778 venne nominato nelle medesime scuole di Bergamo Lettore di filosofia, insegnamento che comprendea la logica, la metafisica e la fisica ed Egli vi aggiunse quello della matematica elementare prima e poi quello del calcolo integrale e differenziale, cosa novissima per quelle scuole. Però gl'invidiosi da una parte ed i re-

trogradi dall'altra, avendo Egli osato di andare contro il sistema fino allora permanente della cieca devozione ai dettati dello Stagirita e di aver seguito le orme del Galileo, gli mossero guerra, ed il Consiglio, che presiedeva alle pubbliche scuole di Bergamo, con le sue deliberazioni incominciò ad inceppare il libero insegnamento di Lui, tanto che Egli fu costretto nel 1786 a rinunciare al suo posto e andare a Pavia, ove in quell'Ateneo trovò campo più propizio al suo ingegno (2). Ivi, succedendo all'illustre Paoli, insegnò gli elementi di Algebra e di Geometria prima e poi Matematica applicata; e negli anni scolastici 1789-90, 1793-94 ebbe altresì la carica di Rettore.

Entrate le truppe francesi a Milano il 6 maggio 1796 e chiusasi per poco l'Università di Pavia, alla riapertura il MASCHERONI fu riconfermato alla sua cattedra; nel 1797 fu dapprima eletto alla *Società di Pubblica Istruzione* e poi al *Corpo legislativo consulente*, il quale, promulgata la Repubblica Cisalpina, presiedette per qualche tempo ai pubblici affari. Nello stesso anno fu dal Bonaparte mandato prima in Valle Camonica come Commissario del *Direttorio esecutivo* a stabilire i confini fra' Dipartimenti del Serio e del Mella, e poi nominato fra' Rappresentanti del popolo nel gran Consiglio e riconfermato per l'anno successivo.

Avendo il governo della Repubblica francese nominata una Commissione di matematici per studiare un nuovo sistema di pesi e misure dedotto dalla grandezza della Terra, il 25 maggio 1798 il Direttorio invitò a Parigi il MASCHERONI per prendere parte ai lavori di questa commissione; ed il 17 settembre dello stesso anno Egli si recò nella capitale della Francia, ove si acquistò la stima e la benevolenza non solo dei suoi illustri colleghi della commissione, ma di tutti i dotti e scienziati che lo avvicinarono. Ivi però ben presto incominciarono pel MASCHERONI i dolori che lo condussero alla tomba. Entrati gli Austro-Russi a Milano il 14 aprile 1799 e decaduta la Repubblica Cisalpina, Egli si trovò senza gli stipendi che gli venivano dall'Italia, e fu costretto a cercar di che vivere accettando l'insegnamento della Fisica e della Matematica nel Collegio di Antonio Dubois, al quale veniva raccomandato dal Lagrange. V'insegnò 4 mesi, dal 13 ottobre 1799 al 9 marzo 1800, quando e pel dolore di sapere la sua cara patria sotto il dispotismo austriaco e pel diverso regime di vita e per la fatica dell'insegnamento gravemente si ammalò. Dopo la battaglia di Marengo essendo già stato dal Bonaparte,

primo Console della Repubblica Francese, rinominato alla sua cattedra nell'Università di Pavia, Egli sperava di guarire presto per ritornare in Italia, ma il male non volle risparmiarlo, ed il 14 luglio del 1800, per ostinata malattia di petto, in età di 50 anni, quell'*alma gentile*

Dopo molto affannarsi entro il suo velo  
E anelar stanca su l'uscita, alfine  
L'ali aperse, e raggiando alzossi al cielo.

Morì, scrisse il Mongili, come muore l'uomo dabbene che visse per dare esempi di virtù e per accrescere il sacro tesoro delle scientifiche cognizioni.

Fu sepolto a Parigi con onori degni di Lui; ma, fatto doloroso, oggi ignorasi ove riposano le spoglie mortali del gentile poeta ed acuto matematico Bergamasco.

\* \* \*

Nella *Bibliografia mascheroniana* del Ravelli trovasi un esteso *Elenco delle biografie, elogi e notizie* del nostro Autore (3). Altre notizie bibliografiche si possono desumere dal volume del Fiammazzo e dalle opere quivi citate. Senza fermarci in queste notizie daremo qui l'elenco delle opere matematiche del MASCHERONI con un breve cenno su di esse, tralasciando completamente di occuparci delle sue opere letterarie e politiche.

1. *Della più bella proprietà della curva isocrona a direzioni convergenti*, ecc.

E questa una breve nota pubblicata il 19 settembre 1782 e dedicata al matematico Achille Alessandri di Bergamo, ove dimostrasi che la curva isocrona tende verso una spirale infinita, la quale fa un angolo costante col raggio vettore. È il primo lavoro di matematica del MASCHERONI.

2. Nello stesso anno 1782 pubblicò un opuscolo intorno alla *Maniera di misurare l'inclinazione dell'ago calamitato* (Bergamo, 1782, in-8° con una tav.)

In quel tempo per misurare l'intensità della forza magnetica in un luogo non conosceasi che un metodo inesatto del Muscénbroeck. Il MASCHERONI suggerisce in questo suo studio di sospendere ad

angolo retto l'ago calamitato all'estremo inferiore di una verga verticale di rame e in modo che possa facilissimamente oscillare per la diversa inclinazione magnetica in diversi luoghi, o nello stesso luogo in diversi tempi. Disposto allora l'ago nel meridiano magnetico del luogo, esso non si mantiene orizzontale, ma un suo estremo s'inclinerà verso il nord e con le sue oscillazioni descriverà una curva trascendente, le cui ordinate, come il MASCHERONI dimostra, sono proporzionali alla forza magnetica. Egli descrive la natura della curva, che molta analogia presenta con la concoide di Nicomede e coll'epicicloide di Giovanni Bernoulli, ne studia i punti singolari, dà la regola per tracciare le tangenti e ne determina la quadratura.

3. *Sulle curve che servono a delineare le ore ineguali degli antichi nelle superficie piane.*

— Questa breve nota fu la prima volta inserita nel vol. VII degli *Opuscoli scelti sulle scienze e sulle arti* (Milano, 1784) e poi ripubblicata nella 2<sup>a</sup> ed. dell'opera seguente.

In essa dimostrò esatta l'osservazione anche fatta dall'ab. Scipione Dehe, che le ore ineguali dei Giudei e dei Romani non debbano essere segnate su superficie piane da rette; e ad illustrare ciò incise una *Meridiana* sopra un disco di ottone, oggi posseduta dalla Biblioteca civica di Bergamo, ove sono tracciate le linee orarie dei diversi sistemi antichi.

4. *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte.*

Quest'opera, che viene generalmente ritenuta la principale e per la quale ben presto l'Autore salì in fama di valente geometra, fu stampata la prima volta in Bergamo nel 1785 (in-4<sup>o</sup>, con 13 tav.) e poi coll'elogio del March. Ferdinando Landi a Milano nel 1829 (in-16<sup>o</sup>, con 5 tav.)

In essa Egli si addimostra non solo maestro della Meccanica e della Geometria degli antichi, ma anche del Calcolo infinitesimale; e quantunque l'argomento era già stato trattato da valenti matematici come Giacomo Bernoulli, il Gregory, il la Hyre, il Lorgna, pure Egli si mantiene originale e aggiunge nuove ed importanti verità sull'argomento. Considerando che la materia non si può ritenere perfettamente rigida ed ugualmente dura, e che quindi il sottarco non è una vera curva di equilibrio, trasferisce questa nella linea che passa pei centri di gravità di tutti i cunei componenti la volta, studia la superficie d'equilibrio, luogo di queste linee nelle diverse se-

zioni verticali e, mediante il principio delle velocità virtuali, crea la scienza del solido fondamento degli edifici, esaminando l'equilibrio in tutte le specie di volte.

Per quest'opera si ebbe lodi dai matematici dell'epoca ed il Bossut scriveagli : « Vous avez traité dans cet ouvrage un grand nombre  
« de questions très-intéressantes et très-utiles; et vous y montrez une  
« grande sagacité à manier l'analyse. Vous me paraissez destiné à  
« honorer votre patrie ».

5. Nella seconda edizione italiana (Pavia 1787) del corso di matematica dell'abate Bossut tradotto dal p. Andrea Mozzone, libro di testo in moltissime scuole italiane ed anche quello usato dal MASCHERONI per le sue lezioni di matematica elementare nell'Università di Pavia, v'inserì alcune sue note in Appendice, note che vennero poi riprodotte, in tutto o in parte, in altre edizioni del medesimo Corso. Fra le note trovansi il *Metodo di misurare i poligoni piani*, che poi nello stesso anno a Pavia fu anche pubblicato a parte.

Quivi insegna a misurare un qualsiasi poligono, convesso o concavo, senza far uso della risoluzione del poligono in triangoli, determinando alcuni elementi da altri dati. Alla fine trovasi la descrizione di un traguardo, mediante il quale non solo si ha la misura dell'angolo, ma anche il seno ed il coseno di esso. In questo opuscolo oltre la novità sono da ammirarsi l'ordine e la chiarezza, doti che del resto riscontransi in tutte le opere del MASCHERONI.

L'Huilier inserì i problemi e le soluzioni di quest'operetta nella sua *Polygonométrie*, pubblicata due anni dopo (Ginevra, 1789), senza far cenno del matematico italiano. Ciò il MASCHERONI nobilmente accenna nella prefazione dei suoi *Problemi per gli agrimensori*, colle seguenti parole che trascriviamo, poichè addimostano il nobile animo suo : « Io conobbi nel leggere questo libro (dell'Huilier) non solo che  
« il mio metodo conteneva tutti i suoi problemi, ma inoltre che io  
« nelle soluzioni analitiche presentava le stesse formole e camminava  
« sulle stesse tracce di un autore che aveva stampato il suo libro  
« due anni dopo il mio : ed ebbi in vero meraviglia nel vedermi  
« coincidere in tal modo con quel matematico ». E soggiunge poi :  
« Non ostante ciò, merita ancora il libro di M. l'Huilier, che tu te  
« ne prevalga, sì per l'erudizione, che per le dimostrazioni geometriche da lui aggiunte ».

6. *Ad notationes ad calculum integralem Euleri in quibus non-*

*nulla problemata ab Eulero proposita resolventur, etc.* (Ticini, 1790).

7. *Adnotationum ad calculum integralem Euleri in quibus non-nullae formulae ab Eulero propositae plenius evolvuntur. Pars altera, etc.* (Ticini, 1792).

Questi due volumetti, ove l'Autore addimostra sempre più l'acutezza del suo ingegno, hanno lo scopo di risolvere varie quistioni proposte dal più grande matematico del sec. XVIII e soprattutto sono da notarsi le ricerche intorno al così detto logaritmo integrale.

8. Alla fine del secondo volume della seconda edizione veronese delle opere di Wolfio (4) pubblicato nel 1791, vi sono le *Adnotationes Mascheronii in R. Archigymnasio Ticinensi Mathem. Prof.*

Sono quindici note che tutte si riferiscono alla parte meccanico-statica dell'opera.

9. *Problemi per gli Agrimensori con varie soluzioni.*

Quest'opera, che dà un contributo alla *geometria della riga*, fu la prima volta pubblicata a Pavia nel 1793 (in-8° con 4 tav.) e poi a Milano nel 1802 col titolo:

*Problemi di geometria colle dimostrazioni aggiunte dal cittadino Sacchi, capitano in 2. d'artiglieria, ecc.* (in-8° con 4 tav.)

Le dimostrazioni, come lo stesso Sacchi dice nella sua prefazione, sono state consigliate dal MASCHERONI stesso.

Della medesima opera a Milano nel 1832 apparve un'altra edizione col titolo:

*Problemi di geometria colle dimostrazioni del capitano Sacchi, edizione arricchita coll'aggiunta di alcuni problemi ricavati da un esemplare della prima edizione postillata dall'autore* (in-16°, con 5 tav.).

Inoltre quest'opera è stata tradotta in francese da un anonimo e pubblicata a Parigi nel 1803.

Nella lusinga che anche di questo libro si faccia una nuova edizione, la quale possa essere studiata dai nostri giovani delle scuole secondarie, ne diamo qui un breve sommario.

L'opera costa di 5 libri. Nel 1° che comprende l'altimetria, l'Autore dà dei metodi per misurare la distanza di punti inaccessibili; nel 2° dà dei metodi per la misura degli angoli e per tracciare rette ortogonali senza squadra o grafometri; il 3° contiene problemi sulla misura di superficie piane o curve e sulla loro divisione in parti che stiano fra loro in dato rapporto; nel 4° espone la sua poligonometria già pubblicata nell'opuscolo di cui si fa cenno innanzi (n. 5), ge-



neralizzando le formole per qualunque spazio chiuso da quantesivogliano rette; nel 5° infine tratta della misura dei solidi poliedri.

10. Nel vol. II (fasc. di Giugno, 1795, pag. 185-206) del *Giornale fisico-medico di L. Brugnatelli*, che pubblicavasi a Pavia, evvi del M<sup>A</sup>-SCHERONI una

*Lettera all'illustre signor don Annibale Beccaria patrizio milanese, con alcuni problemi geometrici sciolti col cerchio senza la regola.*

E il primo saggio della *Geometria del compasso*, come l'Autore dice nella sua introduzione a quest'opera (v. pag. 6 della presente edizione) e contiene fra le altre costruzioni la divisione della circonferenza col solo compasso in 24 ed in 120 parti eguali. La prima semplicissima è stata riportata nella presente opera, la seconda invece complicata è stata dall'Autore sostituita da altra molto più semplice.

11. Due anni dopo diè alla luce l'opera

*La Geometria del compasso* (Pavia, presso gli eredi di Pietro Galeazzi, anno V della Repubblica Francese, 1797, in-8° con 14 tav.) che integralmente ripubblichiamo in questa nuova edizione.

Egli ideò questa opera *originale e curiosa* (5) che rese presso tutti i matematici glorioso il suo nome, per venire in aiuto ai costruttori d'istrumenti astronomici, poichè questi pervenivano a dividere la circonferenza in parti eguali mediante ripetuti tentativi, facendo uso anche di scale e di doppi piani, senza però raggiungere la precisione geometrica desiderata. Egli, mediante tre punti fuori della circonferenza determinati geometricamente, perviene a costruire mediante il solo compasso tutte le possibili divisioni della circonferenza senza nemmeno l'errore di un sesto di minuto secondo; ma non sono queste le sole costruzioni del libro.

La risoluzione di qualsiasi problema si può ridurre alla determinazione di punti, poichè anche quando il problema richieda o tracciare una retta o descrivere una circonferenza, quella è individuata da due suoi punti, questa dal centro e da un punto della sua periferia; ed i punti richiesti sono sempre ottenuti mediante la mutua intersezione di rette e circonferenze. Facendo uso dei due istrumenti, la riga ed il compasso, si risolvono tutti i problemi, poichè con la sola riga si determina il punto d'intersezione di due rette, col solo compasso i punti d'intersezione di due circonferenze e con l'una e con l'altro i punti d'intersezione della retta e della circonferenza.

Il Cardano (6), il Tartaglia (7) ed il Benedetti (8), geometri ita-



liani del sec. XVI, si proposero e riuscirono nell'intento, di costruire tutti i problemi euclidei, cioè di 1° e di 2° grado, mediante la riga ed il compasso di apertura costante, geometria del resto non ignorata dai Greci come rilevasi da un passo di Pappo Alessandrino nella sua *Collezione matematica*, e che già avea destato l'interesse degli Arabi, come risulta da un *Libro di costruzioni geometriche* di Abû 'l Wafâ (9); il Poncelet (10) e lo Steiner (11) han poi dimostrato che i detti problemi possono altresì essere costruiti con la riga e con una circonferenza fissa di noto centro nel foglio di disegno. Il Brianchon (12) invece al principio del sec. XIX ha coltivato un altro ramo della Geometria, proponendosi la risoluzione di alcuni problemi mediante l'uso della sola riga. Pria del Brianchon si occuparono però della *Geometria della riga*, avendo specialmente di mira i problemi pratici che interessano gli agrimensori e gli artiglieri, quei problemi cioè che si propongono di eseguire sul terreno diverse operazioni geometriche, come *misurare distanze*, *tracciare parallele*, ecc., lo Schooten (13), il Lambert (14), il Servois (15), ed il nostro MASCHERONI nell'opera qui precedentemente accennata (v. n. 9). Inoltre la *Geometria della riga*, la quale si collega alla *Geometria proiettiva* che pone fra tutte le linee in evidenza la *retta*, fu molto coltivata nel secolo or ora spirato da una schiera di valenti geometri di tutti i paesi (16).

Ancora il Coatpont in un articolo pubblicato nel 1877 nella *Nouvelle correspondance mathématique* ha concepito la riga sotto un altro aspetto.

Egli dice: « Je définis règle une lame offrant deux côtés rectilignes et parallèles, permettant de tracer des parallèles équidistantes », fondando così un nuovo ramo della Geometria, la *Geometria della riga piatta* (17). Non possiamo qui per i limiti prefissici dare più ampie notizie intorno a queste branche della Geometria, ma considerando l'utilità che di tali studi ne ricaverebbe specialmente l'insegnamento della matematica elementare nelle scuole medie, facciamo voti che qualche valente cultore delle discipline geometriche voglia scrivere un'opera per i nostri giovani studenti, dalla quale essi apprendano le costruzioni dei problemi euclidei coi diversi istrumenti di cui si possa fare uso.

Il MASCHERONI in quest'opera, ammirata anche dal non facile ammiratore Steiner, risolve, facendo uso del solo compasso, tutti

i problemi euclidei con ingegnose costruzioni e risolve ancora con grandissima approssimazione diversi problemi di ordine superiore alla Geometria elementare propriamente detta, i quali esigono l'uso di altre curve oltre la circonferenza.

Se le sue dimostrazioni, con il continuo richiamo alle proposizioni di Euclide, del resto unico testo allora di Geometria elementare, riescano qualche volta pesanti e potrebbero essere oggidì semplificate, le sue costruzioni sono sempre elegantissime e spesso più semplici di quelle che ordinariamente si fanno adoperando e riga e compasso: di ciò il lettore può facilmente persuadersi adoperando p. es. il metodo della *Geometrografia del Lemoine* (18) per determinare la semplicità e l'esattezza di una costruzione geometrica. E « non vi è dotto geometra che anche oggigiorno, dopo quasi un secolo di avanzamenti in questa scienza, non possa studiare l'opera del MASCHERONI senza ricavarne buon frutto (19) ».

Il MASCHERONI dedicò il volume a *Bonaparte l'italico* con breve poesia, e a lui lo presentò a Mombello, ove Napoleone, sconfitto il nemico, erasi ritirato il 17 maggio 1797 intento ad ordinare la Repubblica Cisalpina.

Il giovane Generale, sollecito sempre di far stupire il pubblico sia nelle piccole che nelle grandi cose, volle egli stesso partecipare le nuove costruzioni geometriche al Laplace e al Lagrange, come leggiamo nel *Moniteur* del 20 Ventoso, an. VI (10 marzo 1798; f. 170 p. 684) in occasione dell'annunzio della traduzione francese di quest'opera fatta da Antonio Michele Carrette: « Les géomètres français n'avaient pu se procurer encore ce savant ouvrage de MASCHERONI, déjà célèbre dans la carrière des sciences mathématiques par un profond commentaire sur le calcul intégral d'Euler. Bonaparte le fit connaître, il y a environ deux mois, à Laplace et à Lagrange qui conçurent la plus favorable opinion de ce nouveau genre de géométrie ». Nello stesso giornale è accennata la meraviglia destata l'11 Dicembre 1797 all'Istituto dal Bonaparte, il quale propose a quei matematici alcuni problemi della *Geometria del compasso* e si legge che il Laplace non seppe dare altra risposta che: « Tutto ci aspettavamo da voi, generale fuorchè, lezioni di matematica ».

Il celebre matematico ed astronomo Delambre, segretario perpetuo dell'Istituto francese per la parte delle scienze esatte, nel rapporto generale che fa all'Imperatore Napoleone sui progressi della

matematica dal 1789 al 1808, pur essendo parco lodatore degli stranieri, accennando l'opera del MASCHERONI così si esprime: « La Geometria antica non ammetteva nelle sue dimostrazioni se non quello che può eseguirsi mediante la riga ed il compasso. MASCHERONI più severo ancora volle escludere la riga. Vi è certamente da rimanere grandemente meravigliati del gran numero di nuove ed acutissime proposizioni ch'Egli ha saputo trovare in un argomento apparentemente esaurito. I suoi principali teoremi erano stati portati in Francia col Trattato di Campoformio dal vincitore e pacificatore dell'Italia. Nacque nei dotti francesi il desiderio di conoscere per intero l'opera di MASCHERONI e ben tosto ne fu pubblicata la traduzione ».

La traduzione francese fu fatta, come abbiamo innanzi accennato, dal Carette e pubblicata a Parigi la prima volta nel 1798 ed una seconda volta nel 1825. Anche in Germania se ne fece una traduzione tedesca dal Güson, pubblicata a Berlino nel 1825.

La bibliografia della *Geometria del compasso* non è punto ricca. Oltre le due edizioni della traduzione francese e l'edizione della traduzione tedesca dell'opera del MASCHERONI, abbiamo alcuni rimaneggiamenti dell'opera medesima (20) e due note l'una del Dubouis nel *Journal de Math.* (t. XXII, 1892) e l'altra del professore G. Cesàro nelle *Mémoires de la société royale des sciences de Liège*, nelle quali si dimostra la possibilità di risolvere i problemi elementari col solo compasso, ignorando l'opera del MASCHERONI. Abbiamo poi un breve studio dell'Adler (21), il quale dimostra lo stesso mediante il principio della trasformazione per raggi vettori reciproci. Un'applicazione degna di nota del metodo di MASCHERONI è la divisione della circonferenza in 17 parti eguali ottenuta recentemente dal Gérard (22) col solo compasso, divisione che già il Klein diceva *certamente possibile* (23). Non si può quindi dire che « le ricerche compiute dall'autore della *Geometria del compasso*, abbiano gran che fornito ai geometri occasione di spingersi a studi ulteriori sull'argomento. È un male, perchè questo genere di ricerche non solo potrebbe condurre a risultati interessanti come curiosità scientifica, ma potrebbe anche rendere un buon servizio nel campo didattico » (24). Forse a ciò avrà contribuito la rarità dell'edizione dell'opera del MASCHERONI, ed è perciò che siamo stati spinti a ripublicarla.

12. Seguitiamo l'enumerazione delle opere del MASCHERONI.

*Notizie generali del nuovo sistema dei pesi e misure dedotte dalla grandezza della Terra* (Milano, 1798, in-8°).

Cesare Beccaria fin dal 25 gennaio 1780 avea presentato una relazione al Magistrato Camerale per lo Stato di Milano per la uniformità delle misure di lunghezze, proponendo di dividere le dette misure in frazioni decimali; ma la proposta dell'autore del celebre libro *Dei delitti e delle pene* rimase inascoltata fino a quando il Consiglio legislativo della Repubblica Cisalpina l'11 marzo 1798 non approvò di eleggere una speciale Commissione per statuire un sistema decimale di pesi, misure e monete analogo a quello della Repubblica Francese. Fra' Commissari eravi il MASCHERONI, il quale, per rendere accetto al publico il nuovo sistema, spiegandone tutta l'utilità pratica, pubblicò detto opuscolo, che gli procurò l'onore di essere chiamato fra' delegati della Repubblica francese e degli Stati alleati o neutri nella Commissione che dovea stabilire le nuove comuni misure; onore ch'Egli pagò con la morte.

13. Nel vol. IX delle *Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle scienze*, (Modena, 1802) trovasi inserita un'opera postuma del MASCHERONI dal titolo

*Spiegazione popolare della maniera con la quale si regola l'anno sestile o intercalare ed il cominciamento dell'anno Repubblicano*, ch'egli avea mandato il 24 Germinale an. VII (13 aprile 1799) al Serbelloni, ambasciatore della Repubblica Cisalpina presso la Repubblica Francese.

Di questo studio il Reullier così scrivea al Serbelloni: « Cet ouvrage m'a paru infiniment propre à rendre familières ces idées naturellement abstraites. Il ne peut à mon avis qu'être très-utile à l'Italie, et faire honneur à son Auteur ».

\*  
\* \*

Morto il MASCHERONI, i numerosi suoi manoscritti esistenti a Parigi furono consegnati al fratello Giuseppe e da questi venduti nel 1819 al dotto bibliofilo avv. Aloisio Fantoni di Rovetta, il quale con venerabile affetto li ordinò, legandoli in volumi. Morto nel 1874 il Fantoni, gli eredi ne proposero la vendita ed il D.r Vincenzo Barca ne facea l'acquisto; morto questi i preziosi volumi passarono alla di lui erede la Signora Chiarina Barca-Albani.

Questi manoscritti furono per invito del Pancaldi, Ministro degli affari esteri della Repubblica Cisalpina, la prima volta esaminati dal celebre astronomo dell'Osservatorio di Milano ab. Barnaba Oriani, il quale faceva voti che venissero pubblicati i due studi che contengono un *Trattato sulle misure delle Piramidi triangolari* e una *Memoria sulla integrazione di alcune formole per mezzo delle serie convergenti*, poichè « queste opere servirebbero ad illustrare sempre più il nome « d'un uomo che onorò la Patria e l'Italia co' suoi talenti » (25).

Il Ravelli nella sua *Bibliografia* fa l'elenco degli scritti di questa grande raccolta, che comprende « ben 38 volumi autografi, parte in foglio, o in-4° od in-8°, » come pure l'elenco di altri autografi del MASCHERONI. Più e più volte furono fatti voti che questi scritti venissero pubblicati, ma fin'oggi invano, non ostante che l'illustre prof. P. Riccardi nella nota innanzi accennata scrivesse fin dal 1886: « Fra le opere matematiche, ormai secolari, pubblicate da « autori italiani, le quali conservano ancora un assoluto merito scientifico e letterario, ed un pregio bibliografico non comune, sono da « noverarsi quelle del valentissimo geometra LORENZO MASCHERONI ». Ed anche a noi ci sia permesso ancora una volta di far voti che finalmente sia reso al MASCHERONI il meritato tributo di riconoscenza all'opera sua pubblicando i suoi scritti inediti.

Egli che tanto onorò la patria, ha diritto che i suoi concittadini non lascino in oblio il frutto del suo ingegno.

Parecchie delle opere di matematica del MASCHERONI trovansi citate fra' testi di lingua nel Vocabolario della Crusca e fra esse è inclusa anche la *Geometria del Compasso*.

Pria di finire questi appunti sulle opere matematiche del Mascheroni sentiamo il dovere di rendere sentiti ringraziamenti all'illustre Dottore A. Monti, Professore dell'Ateneo di Pavia, il quale non solo ci fornì dei dati bibliografici, ma gentilmente ci mandò una fotografia del MASCHERONI, dalla quale è presa l'effigie del matematico bergamasco che vedesi in questa ristampa. Questa fotografia è presa dal ritratto dell'Autore che trovasi in fronte all'elogio di Lui scritto dal march. Ferdinando Landi nel 1804 riprodotto ancora nel volume che il prof. Fiammazzo pubblicò in occasione del primo centenario della morte di LORENZO MASCHERONI.

Prof. Gaetano Fazzari.



## NOTE.

(1) Alcuni biografi, fra' quali il Savioli ed il Mangili pongono la nascita del M. il 14 maggio e il 14 marzo, mentre essa avvenne il 13 maggio. Vedi Fiammazzo, *Nel XIV luglio XCM Primo centenario della morte di Lorenzo Mascheroni* [Bergamo 1900, pag. 78].

(2) Il Mascheroni stesso così più tardi scriveva al riguardo: « le filosofie si giudicavano, non so perchè, piuttosto perniciose che altro: quindi « parcamente si volevano insegnate in questi ultimi anni: e so che per usare « una vecchia macchina elettrica... il lettore doveva ogni volta che l'avesse « voluta adoperare, presentare una supplica a' suoi superiori. Si era fatta legge « al mio tempo che assolutamente non s'insegnassero le sezioni coniche. Si era « ingiunto di spiegare sempre in latino fino gli elementi di Euclide » [Fiammazzo, l. c., pag. 83].

(3) *Bibliografia mascheroniana ossia catalogo bibliografico delle opere a stampa dell'abate Lorenzo Mascheroni con un elenco dei suoi manoscritti per Giuseppe Ravelli* [Bergamo, 1881, pag. 81-84].

(4) Christiani Wolfii— *Elementa Matheseos universae*; editio secunda veronensi-Veronae Haeredum Marci Moroni, 1788-1798, vol. 5, in-4.

(5) Così la giudica lo Chasles in una nota a pag. 214 della sua *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*.

(6) Nell'opera *De subtilitate* [Basilea, 1553], lib. XV, pag. 434-440.

(7) Nel *General trattato di numeri e misure* (Venezia, 1560), 5.ª parte, libro III.

(8) Nel suo trattato: *Resolutio omnium Euclidis problematum aliorumque ad hoc necessario inventorum, una tantum modo circini data apertura* (Venezia, 1553).

(9) Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* [2. Auf., vol. I., 1894, pag. 421 e 700].

(10) Nel suo *Traité des propriétés projectives des figures* [Parigi, 1822].

(11) Nel suo celebre volumetto pubblicato la prima volta nel 1833, *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises* (Gesammelte Werke, Berlino, 1881).

(12) *Geométrie de la règle (Correspondance sur l'Ecole polytechnique, t. II,*

pag. 383), ed ancora *Memoire sur l'application de la theorie des transversales* (Parigi, 1822).

(13) *Exercitationum mathematicarum*, liber II. (Lugduno-Batavia, 1656).

(14) *Freie Perspective* (2. ed. 1773).

(15) *Solutions peu connues de differents problèmes de géometrie pratique* (Parigi 1805).

(16) Sull'argomento veggasi G. de Longchamps, *Essai sur la Geometrie de la règle et de l'equerre* ed inoltre i due articoli 9 e 10 l'uno del professore A. Giacomini, l'altro del prof. G. Castelnuovo nelle *Questioni riguardanti la Geometria elementare*, raccolte e coordinate da F. Enriques (Bologna, 1900).

(17) Per l'uso della riga piatta nelle costruzioni dei problemi geometrici veggasi, oltre l'opera del de Longchamps e l'articolo del prof. A. Giacomini, già citati, l'opuscolo di A. Tummarello, *La Geometria della riga* (Palermo, 1900); la monografia del D.r C. Marengi, *Geometria della riga a due orli paralleli* (nel *Bollettino di mat. e di scienze fisiche e mat.* an. II, Bologna, 1901) ed ancora la nota di A. Tummarello, *La Parallelometragrafia* (nel *Pitagora*, an. VII, Palermo, 1901).

(18) Per questo metodo veggasi la nota del prof. E. Nannei, *La Geometrografia di Lemoine o l'Arte delle costruzioni geometriche* (*Il Pitagora*, an. IV, 2. sem., 1898).

(19) Queste giudizio leggesi nell'articolo pubblicato dall'illustre prof. Pietro Riccardi. Per una completa collezione delle opere matematiche di Lorenzo Mascheroni *Bollettino di bibliogr. e storia delle scienze mat. e fisica*, Roma, (t. XIX, 1886).

(20) Frischau, *Die geometrischen Constructionen von Mascheroni und Steiner* [Granz; 1869]; Hutt, *Die Mascheroni'schen Constructionen* (Halle 1880); E. Daniele, *Sulla risoluzione dei problemi geometri col compasso* [art. 8, nelle *Questioni ecc.* di Enriques].

(21) Adler, *Zur Theorie der Mascheroni'schen Constructionen* [Wiener Berichte, 99, 1890].

(22) Questa costruzione del Gérard trovasi nei *Math. Annalen*, 48, 1897. Essa è anche riportata nell'art. di E. Daniele. *Sulle costruzioni dell'ettadecagono regolare* [pag. 411 delle *Questioni ecc.* di Enriques].

(23) Klein, *Conferenze sopra alcune questioni di Geometria elementare*, tradotte dal prof. F. Giudice [Torino, 1896, nota pag. 29].

(24) E. Daniele, *Sulla risoluzione ecc.* (l. c., pag. 250).

(25) Vedi la lettera dell'Oriani pubblicata dal Fiammazzo, l. c., pag. 73, 74.

## A BONAPARTE L'ITALICO

---

*Io pur ti vidi coll' invitta mano,  
Che parte i regni, e a Vienna intimò pace,  
Meco divider con attento guardo  
Il curvo giro del fedel compasso.  
E te pur vidi aprir le arcane cifre  
D' ardui problemi col valor d'antico  
Geometra Maestro, e mi sovvenne  
Quando l'alpi varcasti Annibal novo  
Per liberar tua cara Italia, e tutto  
Rapidamente mi passò davanti  
L'anno di tue vittorie, anno che splende  
Nell'abisso de' secoli qual sole.  
Segui l'impresa, e coll' invitta mano  
Guida all' Italia tua liberi giorni.*





## PREFAZIONE

---

*Il primo pensiero, che mi invitò a tentare le strade nuove di questa Geometria del Compasso, fu questo: mentre si trovano tante cose nuove progredendo nelle matematiche, non si potrebbe forse trovare qualche luogo ancora incognito retrocedendo? Finora le più semplici soluzioni della geometria sono state giudicate quelle, che altro non impiegano, che il compasso e la riga; ossia, ciò che è lo stesso, la retta, che è la più semplice tra le linee, e il cerchio, che è la più semplice fra le curve. A questi due stromenti, per così dire, de' problemi, che un tempo determinavano e costituivano la geometria elementare, furono aggiunte in progresso le curve coniche; quindi le superiori al secondo grado e le trascendenti di varie spezie. Si sono continuate ad arricchire queste profonde indagini geometriche coi nuovi soccorsi dell'algebra sì finita, che infinitesima a tale, che ormai que' ritrovati, i quali dapprima parvero maravigliosi agli antichi, e degni de' sacrificj di Talete e di Pitagora, sono l'appannaggio dei fanciulli dei nostri giorni. Or dissi: non potresti tu retrocedere dagli elementi, come da una linea di demarcazione, e cercar qualche cosa rimasta addietro a guisa di trascurata? È egli vero che i problemi elementari d'Euclide sieno della più semplice costruzione? O non si potrebbe l'elemento matematico risolvere ne' suoi elementi fondamentali riga e compasso, a guisa di chi ha separata l'acqua in due arie, e qualche aria pure stimata semplice, in due altre sostanze? A questo punto m'avvidi, che non potendosi far uso della riga sola se non per condurre una retta; si poteva però forse far uso del solo compasso non per descrivere solamente un cerchio, o un arco d'esso; ma descrivendone più con più centri, e con diverse aperture, trovare per via delle loro sezioni mutue più punti, che fossero utili, e appunto i cercati di posizione in qualche problema.*

*Fin qui conobbi, che questo era un ramo finora non coltivato per nulla dai matematici, e che soluzioni di simil genere ottenute per av-*

*ventura col solo compasso sarebbero state per la loro costruzione più elementari di ogni altra. Ma due cose mi trattennero per poco di accingermi a tentar nulla per questa via. La prima fu il pensiero: qual pro ne verrà se tu arrivi a trovare col solo compasso que' punti, che altri hanno già finora trovati con esso e colla riga? La seconda era il timore, che da principio sembrommi ben ragionevole, che anzi che avere vantaggio da miei tentativi, fossero pure coronati dall'esito; avrei avuto discapito. Le costruzioni col solo compasso per trovare i punti della geometria elementare sarebbero state complicate a più doppi sopra le già conosciute, nelle quali interviene la riga. Avrebbe dunque la teoria mancato d'eleganza, e la pratica di precisione. Sicchè io era al procinto d'abbandonare l'impresa.*

*Mentre io era così irresoluto, m'accadde di rileggere la maniera colla quale GRAHAM e BIRD dividevano in Inghilterra i loro grandi quadranti astronomici (Encyclop. Method. Articl. quart de cercle mural). Il quadrante di GRAHAM fatto da lui per Greenwich non solo si dice aver servito di modello alla maggior parte di quelli che si sono fatti dopo; ma vien considerato ancora per la sua precisione dagli astronomi per uno de' migliori, che siansi mai adoperati nell'astronomia, fino all'epoca dei quadranti di RAMSDEN. Ora vidi che la divisione di quella celebre macchina, abbandonata affatto la riga, fu eseguita col solo compasso. È interessante la descrizione del metodo impiegato in quella lunga ed ingegnosa operazione. Io non entrerò qui a dire le ragioni, per le quali la riga ne fu esclusa. Le indovineranno facilmente tutti quelli, che hanno perizia di simil genere di lavori. Per accennare in generale i vantaggi, che ha il compasso sopra la riga, qualora si tratti di una descrizione precisa di linee, che non debbano temere l'esame del microscopio, basta avvertire, che trattandosi specialmente d'una riga alquanto lunga, è quasi impossibile ch'ella sia così diritta, che ne garantisca per tutto il suo tratto della posizione a luogo de' punti, che in essa sono. E sia pur essa rettilissima. Sanno i pratici, che il dovere strisciare lungo essa colla punta che segna, porta seco una incertezza di parallelismo nel moto dell'asse di questa punta, o di perfetto adattamento allo spigolo, che rende spesso inutile la sua massima perfezione. A queste due difficoltà non va soggetto il compasso. Qualora esso sia fermo nell'apertura, e finissimo nelle punte; centratane una immobilmente, il che non è difficile, l'altra scorrendo segna da sè un arco così preciso ed esatto, che nulla più.*

*Nel leggere quella descrizione avvertii, che GRAHAM ebbe quattro incomodi. Il primo fu, che dovette operare per via di tentativi. Pre-scindendo dall'arco di sessanta gradi, che fu da lui determinato col raggio del cerchio; tutte le sue suddivisioni furono eseguite tentando. Gli Antichi non hanno somministrato mezzo di dividere la circonferenza di un cerchio col solo compasso, altro che in sei; questo viene esposto e dimostrato nella proposizione decimaquinta del libro quarto d'Euclide. Non potè dunque GRAHAM ottenere precisione geometrica, fuorchè in un punto.*

*Il secondo incomodo fu la perdita di tempo, che necessariamente si consuma anche dai più abili nei tentativi.*

*Il terzo fu l'aver dovuto impiegare due piani; uno, sul quale fare le prove; l'altro, sul quale trasportarne i risultati, che era lo stesso piano del quadrante. Ciò si fece da lui per non guastare colle prove sul quadrante la superficie del lembo.*

*Il quarto fu l'aver dovuto eseguire due divisioni di diverse specie. Siccome la divisione del quadrante in novanta gradi portava seco le suddivisioni di un arco in tre, e in cinque parti, e i tentativi di queste suddivisioni riuscivano imperfetti per la troppa accumulazione di errori; si volle da lui eseguire un'altra divisione del quadrante stesso accanto alla prima, la quale non procedesse, che per via di bissezioni. Diviso dunque l'arco di sessanta gradi in due parti, ed avuto l'arco di trenta, e quindi il quadrante diviso in tre parti; colle suddivisioni per due si ebbe in seguito la sesta, quindi la duodecima parte ecc. fino a che tutto il quadrante restò diviso in parti novantasei. Essendo questa la divisione, che meritava più fiducia; l'altra divisione in novanta gradi, che era pur quella, che doveva immediatamente servire agli Astronomi, si confrontò, e si corresse sopra questa via d'una tavola calcolata all'uopo.*

*Tutti questi inconvenienti furono forse la cagione, per la quale BIRD si appigliò ad un altro metodo per dividere i suoi quadranti. Egli determinava gli archi per via delle loro corde, che prendeva sopra una scala di parti eguali. Ma nemmeno questa seconda maniera è libera d'imperfezioni; poichè in primo luogo manca di precisione geometrica; ed in secondo luogo trasporta sul quadrante le inesattezze, che trovar si potessero nella scala.*

*La considerazione dell'importanza degl'istromenti astronomici mi richiamò la mente a guardare il mio progetto della Geometria del Com-*

*passo sotto un punto di vista più favorevole. Cominciai a credere, che avrei fatto molto, se avessi potuto dividere la circonferenza col solo compasso in più parti, che in sei. Quanto più avanti avessi potuto spingere la suddivisione, e quanto più questa fosse stata concorde colla divisione del quadrante in novanta gradi; tanto maggior servizio avrei prestato agli artefici d'astronomia. Avrei procurato loro la precisione geometrica; avrei risparmiato loro il tempo de' tentativi, il doppio genere di divisioni, la necessità di due piani, e l'uso non affatto sicuro, e non geometrico delle scale.*

*Mi restava solo il timore, che anche trovandosi per avventura questo nuovo metodo, non riuscisse poi complicato, e lungo a segno di non essere più abbastanza opportuno per l'uso. M'accesi all'opera. Vedendo, che l'applicazione dell'algebra alla geometria non m'assistiva molto in simil genere di ricerche, m'aggirai per altre strade quasi semplicemente geometriche, che io qui indicherei se giovasse; ma siccome io non ho tenuto gran fatto una traccia costante nel mio cammino, e devo molto all'accidente, che dopo varj andirivieni di ripieghi diversi, m'ha presentato, e non sempre così prontamente il risultato ch'io bramava, così non ne dirò nulla. Forse altri potrà speculare un filo in questa dottrina, che conduca per ordine da un problema all'altro, e che se si fosse scoperto da principio, avrebbe facilitata ed abbreviata l'invenzione.*

*Il primo saggio della mia riuscita l'indirizzai due anni fa con una lettera inserita nel Giornale Brugnatelli all'eccellente artista il cittadino ANNIBALE BECCARIA, allora patrizio milanese, ed ora municipalista e socio dell'istruzione pubblica, il quale all'esser fratello del celeberrimo autore de' Delitti e delle Pene aggiunge la gloria vera e propria d'eseguire, qualor gli piaccia, finissimi stromenti di matematica. Quel mio saggio consisteva nel metodo di dividere la circonferenza in ventiquattro parti coll'ajuto d'un solo punto preso fuori di essa. La costruzione di questa divisione è la più semplice, che si possa sperare, e l'ho ritenuta; l'altra in cento venti, che vi esposi, era troppo complicata; ora ne ho trovata una molto più breve, e tale, che la credo la brevissima. V'aggiunsi una spedita costruzione per avere le radici quadrate dall'uno sino alle dieci, che ho pur qui ritenuta. Gli altri problemi esposti in quella lettera siccome complicati, o di poca approssimazione, qui sono omissi.*

*Ora io sono giunto, come si vedrà dal libro, a dividere pronta-*



*mente la circonferenza in dugento quaranta parti con esattezza geometrica per via del solo compasso e non adoperando altro che tre punti presi fuori della circonferenza stessa. Ciascuna di queste parti riesce di un grado e mezzo della divisione usata fin qui in gradi trecento sessanta. Divido, qualora piaccia, ogni arco in due. Ciò geometricamente. Per via di approssimazione divido la circonferenza col solo mezzo di quei tali tre punti in gradi e quarti di gradi senza l'errore d'una sesta parte di minuto secondo. Cogli stessi tre punti divido pure in minuti primi stando sempre al di sotto dell'error d'un secondo. Che di questa precisione possano essere contenti gli astronomi, mi ha lusingato a crederlo il leggere, che nemmeno gli artisti più celebri sieno passati oltre.*

*Ma non mi sembrava aver fatto abbastanza se non serviva colle mie teorie anche alla nuova divisione del cerchio. È noto che i Francesi felici di avere nel seno della loro repubblica geometri primi nell'universo, secondando i loro consigli, hanno finalmente appagato i lunghi desiderj dei dotti col sanzionare in tutte le arti la sola divisione decimale. Questa divisione forse lentamente in altre provincie per l'urto dei pregiudizj, e più per la riazione dell'inerzia, ma invincibilmente col tempo prenderà piede dovunque abbia luogo qualche amore alle scienze, o un ben inteso interesse di commercio. Una delle divisioni, che dovevano riuscire più difficili ad alterarsi era quella della circonferenza del cerchio tra per l'antichità della divisione in 360, e suddivisione in 60 ricevuta dalle nazioni tutte; e per la fatica necessaria a rifar le tavole trigonometriche in qualunque nuovo sistema. Ma l'energia d'una grande nazione che si rigenera, ha vinto tutto. Fissate quattrocento parti, o gradi nella circonferenza, acciò il quadrante, che è il fondamento della trigonometria, resti diviso in cento, e ciascuna di queste centesime suddivisa in cento, e così via via; si sono già calcolate e stampate le tavole dei seni naturali, e artificiali di quelle; e perchè nulla manchi ad assicurare, ed accrescere la precisione de' numeri, cospirò la nuova scoperta de' Francesi di stampare con caratteri saldati in piombo; e si han già tra mano queste nuove tavole di tale edizione chiamata stereotipa eseguita da FIRMINO DIDOT. Più: se n'aspettano altre copiosissime con gran numero di decimali, che si stanno preparando sotto la direzione del celebre PRONY da una moltitudine di attivissimi calcolatori. Tutto ciò mi spinse a cercare un metodo almeno d'approssimazione per dividere la circonferenza in tali nuovi*

gradi e minuti, e m'è riuscito col ministero di que' soli tre punti d'avere con abbastanza pochi giri di compasso questi gradi e minuti centesimali senza il piccolo error d'un secondo.

Se null'altro si fosse fatto, si sarebbe non ostante raccomandato abbastanza il maneggio del puro compasso. Ma strada facendo ho trovato non esserci problema di geometria elementare, che col compasso solo non si potesse risolvere; in questo senso cioè di trovar tutti quei punti, che si richieggono nel problema per la posizione e determinazione delle rette, che v'abbisognano. Questo interessava la teoria. Ho voluto esaurire l'argomento; dare tutti gli elementi a tal uopo, e dimostrare che tutti i punti che Euclide o altri elementaristi trovano col sussidio del compasso e della riga congiunti; col solo primo stromento trovar si possono.

Non tutti i problemi elementari sciolti col solo compasso hanno un'abbastanza semplice costruzione. Ardisco però dire che la maggior parte dei più necessarij son brevi e succinti a segno, che chi vorrà risolverli nella pratica, troverà meglio servirsi del sol compasso per trovarne i punti fondamentali, ripudiando la riga; le vie che propongo nel libro giustificheranno quanto dico.

Io non indicherò qui tutti que' Problemi di simil genere, che mi sembrano di qualche importanza. Eccone non ostante alcuni. Se si vorrà trovare col compasso solo il centro d'un cerchio; si avrà con pochi tratti speditamente. Egualmente si avranno le terze, e le quarte proporzionali; non dico le medie. Chi vorrà costruire poligoni regolari non solo entro o intorno a cerchj dati, ma sopra basi date; ne avrà il mezzo facile nel compasso (1). Chi vorrà trovare radici quadrate di numeri, cioè duplicare, o moltiplicare comunque di area quadrati, o cerchi, o figure simili di qualunque specie; lo farà presto per via del compasso. E tutto ciò con geometrica precisione; essendone capace la natura di tali problemi. Per approssimazione poi chi vorrà avere una lunghezza eguale alla circonferenza d'un cerchio, o un arco eguale al raggio, o un quadrato eguale ad un cerchio, o un cerchio eguale ad un quadrato, o un cubo eguale ad una sfera, o una sfera eguale ad un cubo, o un cubo doppio d'un altro, o triplo, o quadruplo; potrallo avere impiegando sezioni d'archi, ossia determinando sempre non con

---

(1) Gli architetti militari vi troveranno forse molte cose a proposito degli usi loro.

altro che col compasso la lunghezza di que' lati o di quei raggi, che abbisognano alle richieste figure.

*Ecco in breve quanto forma la Geometria del Compasso, che presento al pubblico. Quanto alle dimostrazioni, ho studiato di farle geometriche all'antica. Questo m'è parso più proprio della natura de' miei problemi, e più breve. Dovunque geometricamente erano per riuscir troppo lunghe, ho scorciato il cammino col calcolarlo. Ho dunque servito ad un tempo alla brevità, alla chiarezza, ed all'eleganza quanto ho potuto farlo. Ho citato Euclide il gran maestro degli elementi. Dove occorrono proporzioni, i numeri delle proposizioni ch'io cito, son quelli del TACQUET. La ragione di ciò è, che questo libro è più nelle mani di tutti, che l'antico testo d'Euclide. Ho posti in carattere più grande i paragrafi, che serviranno maggiormente agli artisti. Chi ne vuole la dimostrazione, deve leggere tutto il libro. Chi non vuole che la parte pratica, potrà omettere quanto è stampato in minor carattere. Ciò lo faranno gli artisti; lo farà chi non vuole che divertirsi col compasso. (1) A questo genere di divertimento ho assegnati molti problemi tratti da PAPPO, dall'OZANAM, dal SIMPSON e da altri, che ho messi nel libro undecimo. Ecco tutto ciò che io aveva a dire a' miei lettori sopra questa Geometria del Compasso, che loro presento, la quale per la costruzione de' suoi problemi è la più semplice e la più elementare geometria che aver si possa; e che da nissuno finora, ch'io sappia, s'era toccata.*

---

(1) Essendo lo scopo di questa ristampa principalmente didattico, abbiamo creduto di non fare nel testo la detta distinzione, e tutto il libro è perciò stampato in un unico corpo di carattere.



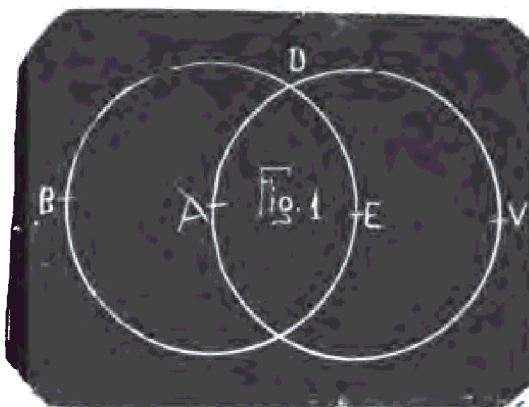


## LIBRO PRIMO

### • PRELIMINARE

1. Chiamo *Geometria del Compasso* quella, che per via del solo compasso senza la riga determina la posizione dei punti.

Dati per esempio due punti  $A$  ed  $E$  (fig. 1); se si cerchi il terzo  $D$ , che sia tanto lontano da ciascuno di essi, quanto essi lo sono tra loro; si descrivano coll'intervallo, ossia raggio  $AE$ , e coi centri  $A$ , ed  $E$  i due cerchj  $EDB$ ,  $ADV$ , che si tagliano nel punto  $D$ ; questo punto sarà il cercato; poichè sarà lontano dai punti  $A$ , ed  $E$  d'un intervallo eguale ad  $AE$  (Prop. 1, lib. I Eucl.). Questo punto  $D$  si è trovato col solo compasso senza la riga.

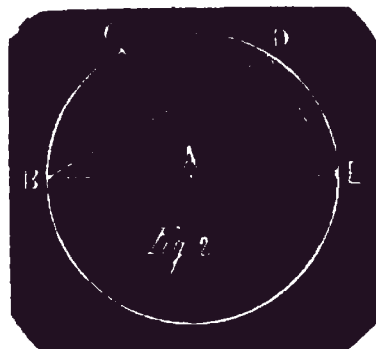


2. Può accadere che la posizione di un punto si trovi col solo compasso; ma per dimostrare la proposizione ci sia bisogno di costruire la figura col mezzo della riga.

Se per esempio, dati due punti  $A$  e  $B$ , che sieno lontani

tra loro d'un certo intervallo, che si prende per l'unità, ossia si fa  $= 1$ ; si cerchi un punto  $D$ , che sia lontano da  $B$  dell'intervallo  $BD = \sqrt{3}$ ; la soluzione del Problema sarà come segue.

Col centro  $A$ , (fig. 2) raggio  $AB$  si descriva il cerchio  $BCD$ . Collo stesso raggio, centro  $B$  si descriva un arco, che tagli la circonferenza in  $C$ . Di nuovo collo stesso raggio, centro  $C$  si



descriva un arco, che tagli la circonferenza più oltre in  $D$ . Sarà questo il punto cercato, e trovato senza la riga.

Per dimostrare nondimeno, che sia l'intervallo  $BD = \sqrt{3}$ , vi sarà d'uopo di linee rette, le quali si segnano colla riga. Sia  $BE$  il diametro del cerchio  $BCD$ , e si guidino le rette  $BD$ ,  $DE$ . Sarà il triangolo  $BDE$  rettangolo in  $D$  (31, lib. III). Sarà dunque il quadrato della  $BE$  eguale alla somma de' due quadrati delle rette  $BD$  e  $DE$  (47, lib. I); e però il quadrato della  $BD$  sarà eguale alla differenza de' quadrati della  $BE$  e della  $DE$ . Ma essendo l'intervallo  $BC = CD = AB$ ; sarà ancora  $DE = AB$  (15, lib. IV), ossia  $DE = 1$ . È ancora  $BE = 2$ . Sarà dunque  $(BD)^2$ , cioè il quadrato della  $BD$ , eguale a  $4 - 1 = 3$ ; e però la sua radice  $BD = \sqrt{3}$ . Il che era da dimostrarsi, e non si è potuto fare senza la riga. Questa proposizione è la 12 del lib. XIII d'Euclide.

3. Dalla definizione di questa *Geometria del Compasso* (§ 1) è chiaro, che appartengono ad essa tutti i Problemi, che si possono sciogliere col compasso solo, benchè per esso solo non si possano dimostrare; com'è il Problema precedente (§ 2).

4. L'uso di questa *Geometria* sarà grandissimo, come apparirà dagli esempj, nel trovare i punti in pratica colla maggior precisione possibile, e spesso molto più speditamente col solo compasso, che chiamando in soccorso anche la riga.

5. Sarà dunque nostro ufizio sciogliere i Problemi col solo compasso; sarà poi lecito servirsi di dimostrazioni costruite secondo l'uso col compasso e colla riga, al qual fine citeremo le proposizioni e i libri d'Euclide.

6. Così poi verremo a capo di questo trattato, che non

abbia a mancare alcun elemento, perchè col solo compasso si possano determinare tutti que' punti di qualsivoglia Problema, che fino adesso col cerchio e colla riga solevansi determinare.

7. Non pertanto noi non porremo qui tutti questi Problemi; ma dimostrati gli elementi necessarj e bastanti per tutti, tra essi sceglieremo un buon numero de' principali, cioè tutti quelli, che ci sembreranno i più utili, o per una certa eleganza pregevoli.

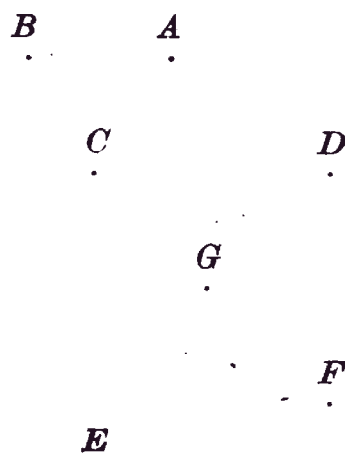
8. Aggiungeremo qui in favore degli artisti, in grazia de' quali in gran parte quest'opera è stata scritta, che sapendo essi la molestia e il pericolo d'errare, che nasce dall'allargare e stringere il compasso a varie aperture precise; noi procureremo di sciogliere i Problemi col minimo numero possibile di aperture di compasso. Sarà poi anche meglio per l'artista avere in pronto tanti compassi *fedeli*, come li chiamano, ossia tali, che uno si possa assicurare, che conservino appunto l'apertura data; quante sono le aperture, che richiede la soluzione del Problema. Poichè accaderà spesso, che dovremo adoperar più volte la stessa apertura dopo averne adoperata una o più altre; così senza allargare o stringere un sol compasso, ripiglieremo quell'altro compasso messo da parte, che la conserva. A questo fine alcune volte chiameremo col nome di compasso primo, secondo, terzo le aperture successive, colle quali verrà sciolto il Problema.

9. Essendo oltre ciò importante alla precisione pratica della posizione di un punto, che la sezione delle linee, che lo determinano, si faccia ad angoli retti o vicini al retto; faremo sempre in modo, che un arco tagli l'altro o ad angoli retti, se ciò ne riuscirà, o almeno ad angoli non molto lontani dal retto.

10. Per essere più brevi, senza però riuscire oscuri, nello indicare le costruzioni delle figure adopreremo spesso alcuni compendj, che saranno tosto intesi al solo guardar la figura. Per esempio nella fig. 2 in luogo di dire: *col raggio AB, e col centro B si descriva un arco, che tagli la circonferenza BCD nel punto C. Poi collo stesso raggio, e col centro C si descriva un arco, che tagli la stessa circonferenza in D ecc.*; diremo solamente: *si faccia ad  $AB=BC=CD$ , ecc.* Poichè è abbastanza chiaro, che i punti *B, C, D*, coi quali si indica la stessa circonferenza

$BCD$  sono nella stessa; cosicchè non v'è alcun pericolo d'equivoco.

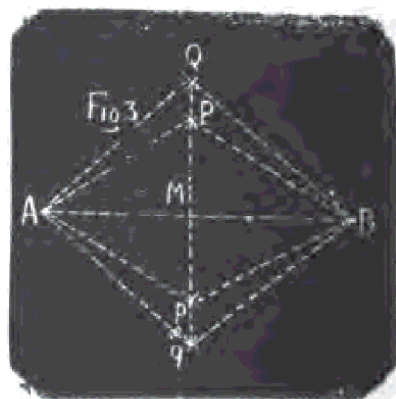
11. Istessamente dati per esempio tre intervalli  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ ; se dirò: si faccia a  $CD = EG$ ; ad  $AB = FG$ ; si dovrà intendere che dica: col raggio  $CD$ , e col centro  $E$  si descriva un cerchio, nella cui circonferenza sia il punto  $G$ . Quindi coll'intervallo  $AB$ , e col centro  $F$  si descriva un altro cerchio, che tagli il primo nel punto  $G$ .



12. Alle volte nelle dimostrazioni nomineremo alcune linee rette, che non saranno nella figura, nominando i due punti estremi, ai quali dovrebbero esser condotte; come se nella figura del § 11, nominassi la retta  $AB$ , ovvero  $CD$ . Ciò faremo quando non vi sarà pericolo d'oscurità, per conservar nitida la figura, e lasciare apparire meglio la costruzione fatta col solo cerchio.

13. *Lemma.* Se co' due centri  $A$ , e  $B$ , e co' raggi  $AP$  ed  $AQ$  si descrivano degli archi, che si tagliano in  $P$  e  $p$ ;  $Q$  e  $q$ ; i punti  $Q$ ,  $P$ ,  $p$ ,  $q$  saranno nella stessa retta (fig. 3).

*Dim.* Essendo per costruzione eguali rispettivamente tra loro tutti i lati de' triangoli  $APp$ ,  $BPp$ ; l'angolo  $APp$  sarà eguale all'angolo  $BPp$  (8, lib. I). Per la stessa si dimostra essere  $APQ = BPQ$ . Dunque la somma de' due  $APp$ ,  $APQ$  è eguale alla somma de' due  $BPp$ ,  $BPQ$ . Ma la somma di questi quattro angoli è eguale a quattro retti (13, lib. I, Coroll.). Dunque ciascuna delle somme di due eguali equivale a due retti. Dunque la  $QPp$  è retta (14, lib. I). Nella stessa maniera si dimostra, che è retta la  $Ppq$ . Dunque i punti  $Q$ ,  $P$ ,  $p$ ,  $q$  sono nella stessa retta.



14. Stanti le stesse cose del § 13, le rette  $AB$ ,  $Pp$ , così  $AB$ ,

$Qq$  si bipartiranno egualmente in  $M$  ad angoli retti, e le  $QP$ ,  $qp$  saranno eguali.

*Dim.* Poichè per l'eguaglianza de' lati de' due triangoli  $APB$ ,  $ApB$  si ha l'angolo  $PAB=pAB$  (8, lib. I). Ma è ancora  $APp=ApP$  (5, lib. I). Dunque anche  $AMP=AMp$  (Cor. Prop. 32, lib. I). Dunque entrambi retti (13, lib. I). E sarà  $Pp$  bipartita in  $M$  per la dimostrazione della Prop. 10, lib. I. Nella stessa maniera si dimostrerà, che si bipartono in  $M$  la  $Qq$  e la  $AB$ . Dalle eguali poi  $QM$ , e  $qM$  togliendo le eguali  $PM$ ,  $pM$ ; i residui  $QP$ ,  $qp$  saranno eguali.

15. *Cor.* Sarà dunque  $(QM)^2=(AQ)^2-(AM)^2$  (47, lib. I).

16. *Lemma.* Stanti le stesse cose del § 13, sarà  $(AQ)^2=-(AP)^2+(PQ)^2+Pp \cdot PQ$ .

*Dim.* Poichè è  $(AQ)^2=(AP)^2+(PQ)^2+2MP \cdot PQ$  (12, lib. II). Ma è  $2MP=Pp$  (§ 14). Dunque ecc.

17. *Lemma.* Sarà pure  $(AQ)^2=(Ap)^2+(pQ)^2-pP \cdot pQ$ .

*Dim.* Poichè è  $(AQ)^2=(Ap)^2+(pQ)^2-2pM \cdot pQ$  (13, lib. II). Ma è  $2pM=pP$  (§ 14). Dunque ecc.

18. *Cor. I.* Essendo  $pQ=pP+PQ$ ; sarà  $(pQ)^2=pP \cdot pQ + PQ \cdot pQ$  (2, lib. II); quindi sottraendo  $pP \cdot pQ$  si ha  $(pQ)^2 - pP \cdot pQ = PQ \cdot pQ$ . E fatta la sostituzione di questo valore nel valore di  $(AQ)^2$  del § 17, si avrà  $(AQ)^2=(Ap)^2+pQ \cdot PQ$ . Donde sottraendo di qua e di là  $(Ap)^2$ , nasce  $(AQ)^2-(Ap)^2=pQ \cdot PQ$ . Se ora si eseguisca la moltiplicazione di  $AQ+Ap$  per  $AQ-Ap$ ; si troverà  $(AQ+Ap)(AQ-Ap)=(AQ)^2-(Ap)^2$ . Quindi si avrà  $(AQ+Ap)(AQ-Ap)=pQ \cdot PQ$ . Donde per la 16, lib. VI si deduce l'analogia

$$pQ : AQ+Ap :: AQ-Ap : PQ,$$

ossia sostituendo  $AP$  in luogo di  $Ap$ , e invertendo alternativamente

$$PQ : AQ+AP :: AQ-AP : pQ$$

Da queste due analogie vien espresso il celebre

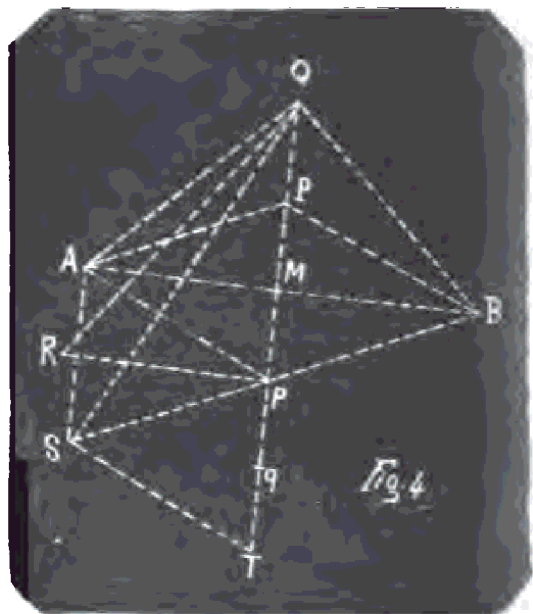
*Teor.* In qualunque triangolo un lato qualunque stà alla somma degli altri due, come la loro differenza stà alla differenza o alla somma de' segmenti, che fa su quel lato la perpendicolare condotta dall'angolo opposto, secondo che essa cade dentro o fuori del triangolo.

19. *Cor. II.* Se sarà  $AQ=pQ$ ; tolti di qua e di là i due

termini eguali  $(AQ)^2$ ,  $(pQ)^2$ , e aggiungendo d' ambe le parti  $pP \cdot pQ$ ; risulterà  $pP \cdot pQ = (Ap)^2$ .

20. *Lemma.* Stanti le stesse cose (§ 13), se sia retto l'angolo  $RpQ$ ; sia poi l'angolo  $RpS = RpA$ ; e  $pS = pR = pA$ ; sarà  $AS$  parallela ed eguale alla  $Pp$ ; e sarà  $(AQ)^2 = (RQ)^2 - AS \cdot pQ$ .

*Dim.* Poichè se dai due angoli retti  $RpQ$ ,  $Rpq$  (fig. 4) si sottraggono i due eguali  $RpA$ ,  $RpS$ ; rimarranno eguali gli angoli  $ApP$ ,  $Spq$ . Ma  $ApP = APp$  (5, lib. I). Dunque  $Spq = APq$ . Dunque  $AP$ ,  $Sp$  sono parallele (29, lib. I). Ma sono anche eguali per costruzione. Dunque le due  $AS$ ,  $Pp$  sono eguali e parallele (33, lib. I).



Si ha poi  $(RQ)^2 = (Rp)^2 + (pQ)^2$  (47, lib. I)  $= (Ap)^2 + (pQ)^2$ . E pel Lemma § 17,  $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - pP \cdot pQ$ . Dunque  $(AQ)^2 = (RQ)^2 - pP \cdot pQ$ , ossia  $= (RQ)^2 - AS \cdot pQ$ .

21. *Lemma.* Stanti le stesse cose (§§ 13 e 20) sarà  $(SQ)^2 = (RQ)^2 + AS \cdot pQ$  (fig. 4).

*Dim.* Poichè se si faccia  $ST = Sp$ ;  $pT = pP$  (§ 1); nei due triangoli  $SpT$ ,  $APp$  si troveranno tra loro eguali gli angoli  $SpT$ ,  $APp$  (8, lib. I); e però  $PpT$  retta (27, lib. I). Sarà poi  $(SQ)^2 = (pS)^2 + (pQ)^2 + pQ \cdot pT$  (§ 16). Ma è  $(pS)^2 + (pQ)^2 = (pR)^2 + (pQ)^2 = (RQ)^2$ ; ed è  $pT = pP = AS$ . Dunque  $(SQ)^2 = (RQ)^2 + AS \cdot pQ$ .

Dai due Lemmi precedenti segue per Corollario essere  $(AQ)^2 + (SQ)^2 = 2(RQ)^2$ .

22. *Lemma.* Se sarà  $AQ = pQ = BQ$  (fig. 4); e  $Ap = pB = pS$ , essendo  $pS$  sulla continuazione della  $Bp$ ; sarà  $AS \cdot pQ = (Ap)^2$ .

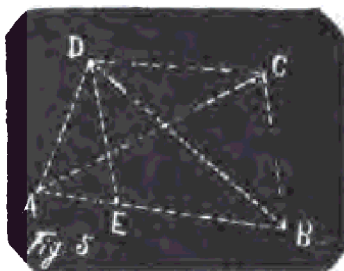
*Dim.* Avendo i triangoli isosceli  $AQp$ ,  $BQp$  i lati eguali tra loro; sarà l'angolo  $QpA = QpB$  (8, lib. I). Sarà poi l'angolo  $ApB$ , che è la somma dei due, eguale anche alla somma de' due angoli  $SAp$ ,  $ASp$  (32, lib. I), i quali essendo eguali



tra loro per essere isoscele il triangolo  $ApS$  (5, lib. I); sarà ciascuno d'essi eguale all'angolo  $ApQ = pAQ$  (5, lib. I). Sarà dunque il triangolo  $pAS$  simile al triangolo  $QpA$  (32, lib. I, 4, lib. VI); e quindi  $pQ : Ap :: Ap : AS$ , e  $AS \cdot pQ = (Ap)^2$  (17, lib. VI).

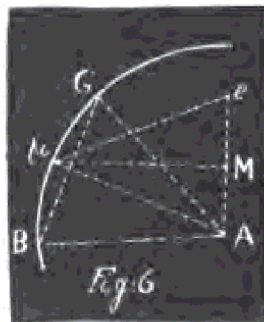
23. *Lemma.* Se si  $AB = AC = BD$ ; e  $AD = BC$ ; sarà (fig. 5)  $DC \cdot AB = (AB)^2 - (AD)^2$ .

*Dim.* I due triangoli  $ADB$ ,  $ACB$ ; avendo i lati rispettivamente eguali, saranno eguali (8 e 26, libr. I). Essendo poi posti tutti e due sulla stessa base  $AB$ ; saranno fra le stesse parallele  $DC$ ,  $AB$  (39, lib. I). Se dunque sulla  $BA$  si prende  $BE = DC$ ; sarà  $DE$  uguale e parallela alla  $BC$  (33, lib. I), e uguale ancora alla  $DA$ . Quindi i due triangoli isosceli  $BDA$ ,  $DAE$ , che hanno un angolo comune in  $A$ , saranno simili (5 e 32, lib. I, e 4, lib. 6.), e sarà  $AB : AD :: AD : AE$ ; quindi  $AB \cdot AE = (AD)^2$  (17, lib. VI). Si ha poi  $AB \cdot AE + AB \cdot BE = (AB)^2$  (2, lib. II). Quindi ad  $AB \cdot AE$  sostituendo  $(AD)^2$ , e a  $BE$  sostituendo  $DC$ ; si ha  $(AD)^2 + AB \cdot DC = (AB)^2$ . E sottraendo  $(AD)^2$ , si avrà  $DC \cdot AB = (AB)^2 - (AD)^2$ .



24. *Lemma.* Se nel cerchio  $B\mu G$  al raggio  $AB$  si alzi nel centro  $A$  la normale  $Ae$  eguale alla corda  $BG$  dell'arco  $B\mu G$ ; e fatto centro in  $e$  col raggio  $AB$  si descriva un arco, che tagli la circonferenza in  $\mu$ ; sarà l'arco  $B\mu$  eguale alla metà dell'arco  $B\mu G$ .

*Dim.* Per l'eguaglianza de' lati de' due triangoli  $ABG$ ,  $A\mu e$  (fig. 6) è l'angolo  $GAB = A\mu e$  (8, lib. I). Si divida per metà l'angolo  $A\mu e$  colla retta  $\mu M$ ; essendo isoscele il triangolo  $\mu eA$ , l'angolo  $\mu eM = \mu AM$ ; quindi nei due triangoli  $\mu eM$ ,  $\mu AM$ , essendo eguali tra loro gli altri due angoli, sarà anche  $\mu Me = \mu MA$  (Coroll. 32, lib. I); quindi  $\mu M$  normale alla  $Ae$  (13, lib. I), e quindi parallela alla  $AB$  (29, lib. I), e sarà l'angola  $M\mu A = \mu AB$  (27, lib. I), sarà dunque  $\mu AB$  la metà dell'angolo  $GAB$ , e però anche l'arco  $B\mu$  metà dell'arco  $B\mu G$ .





25. Se nel parallelogrammo  $ABMN$  sarà la diagonale  $MA$  eguale ai lati opposti  $MB$ ,  $AN$ ; sarà il quadrato dell'altra diagonale  $BN$  eguale al quadrato della prima aggiuntivi i due quadrati degli altri due lati.

*Dim.* Si divida  $AB$  per metà in  $m$  (fig. 7) colla perpendicolare  $Mm$  (10, 11, lib. I), e sopra la  $BA$  continuata si prenda  $An=Bm$ ; sarà  $mn=BA=MN$ ; e però  $MNnm$  parallelogrammo (33, lib. I), e sarà retto l'angolo  $N n B$  (27, lib. I).

Quindi  $(BN)^2=(AB)^2+(AN)^2+2AB \cdot An$  (12, lib. II). Ma  $An=\frac{1}{2}AB$ . Dunque  $(BN)^2=(AN)^2+2(AB)^2=(AN)^2+(AB)^2+(MN)^2$ .

26. Se in qualunque triangolo  $BPE$  si tagli in due egualmente la base  $BE$  in  $A$ , e dall'angolo opposto  $P$  si guidi la  $PA$  (fig. 8); sarà la somma de' quadrati dei lati  $BP$  e  $PE$  eguale alla somma de' quadrati eguali dei due segmenti, aggiuntovi il doppio quadrato della  $AP$ .

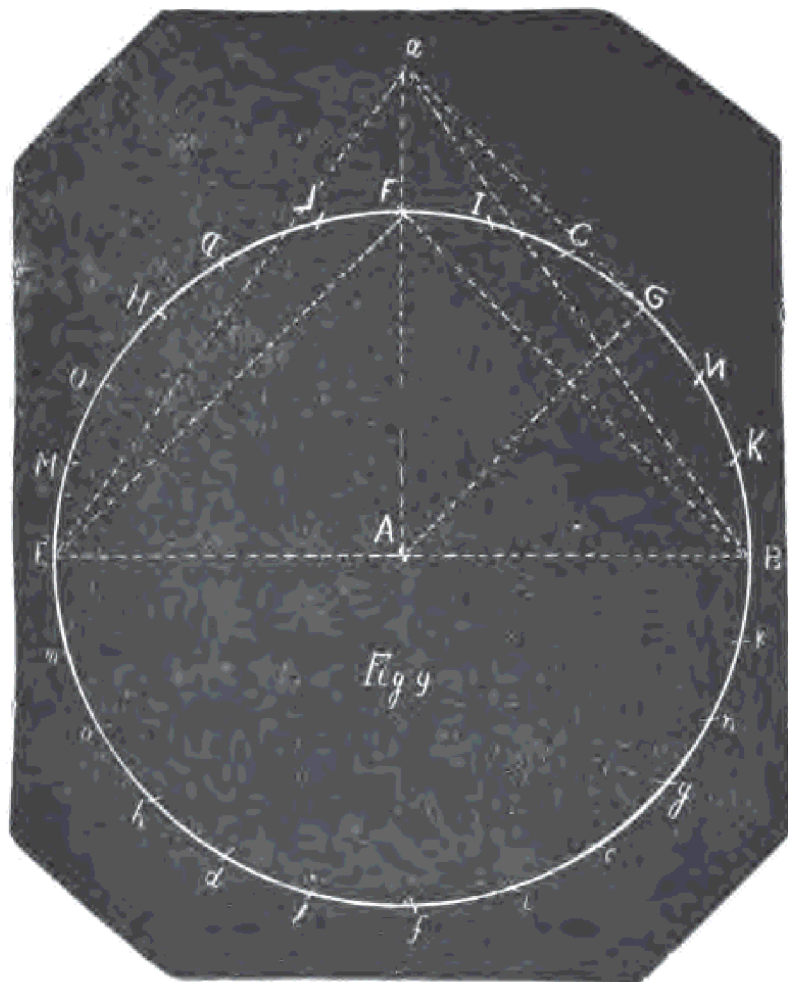
*Dim.* Poichè se si cali il perpendicolo  $PR$  sulla base  $BE$ ; sarà  $(BP)^2=(BA)^2+(AP)^2+2BA \cdot AR$  (12, lib. II). Sarà pure  $(PE)^2=(AE)^2+(AP)^2-2AE \cdot AR$  (13, lib. II). Fatta dunque la somma dei valori dei due quadrati  $(BP)^2$  e  $(PE)^2$ , essendo  $BA=AE$ ; sarà  $(BP)^2+(PE)^2=(BA)^2+(AE)^2+2(AP)^2=2(AB)^2+2(AP)^2$ .



## LIBRO SECONDO

### DELLA DIVISIONE DELLA CIRCONFERENZA E DEGLI ARCHI DEL CERCHIO.

27. *Prob.* Dividere la circonferenza del cerchio  $Bdd$  in quattro parti uguali (fig. 9).



*Sol.* Nella stessa circonferenza di faccia al raggio  $AB=Bc$   
 $=BC=CD=DE=Ed$  col primo compasso (§ 10, 8). Sarà  $dc=$

$cB=BA$  (15, lib. IV). Si faccia a  $BD=Ba=Ea$  col 2° compasso; ad  $Aa=BF=Bf$  col 3° compasso. Si avrà divisa la circonferenza in quattro parti eguali  $BF, FE, Ff, fB$ .

*Dim.* Essendo  $BAE$  un diametro (15, lib. IV); e avendo i triangoli  $aAB, aAE$  tutti i lati eguali, e però eguali gli angoli  $aAB, aAE$  (8, lib. I); questi saranno retti (13, lib. I). Dunque  $(aB)^2=(AB)^2+(aA)^2$  (47, lib. I); e sottraendo  $(AB)^2$  da tutte due le parti, si ha  $(aB)^2-(AB)^2=(aA)^2$ . Si faccia per brevità  $AB=1$ ; sarà  $(aB)^2=(BD)^2=3$  (§ 2). Sarà dunque  $(aA)^2=3-1=2$ , e quindi anche  $(BF)^2=(aA)^2=2=1+1=(AB)^2+(AF)^2$ . Dunque nel triangolo  $FAB$  l'angolo  $FAB$  sarà retto (48, lib. I), e però anche l'angolo  $FAE$  (13, lib. I). Saranno dunque gli archi  $BF, FE$  eguali tra loro, e quarti di cerchio, come pure gli archi  $Bf, fE$ .

28. *Cor.* Essendo retti gli angoli  $BAA, BAF$ ; i tre punti  $A, F, a$  saranno nella stessa retta.

29. Abbiamo dunque già la circonferenza divisa in due parti eguali per esempio nei punti  $B$  ed  $E$ ; in tre parti, come ne' punti  $B, D, d$  (15, lib. IV); in quattro parti ne' punti  $B, F, E, f$  (§ 27); in sei parti nei punti  $B, C, D, E, d, c$ . (15, lib. IV).

30. *Prob.* Dividere una circonferenza in otto parti eguali.

*Sol.* Stanti le cose come al § 27. (fig. 9), si faccia ad  $AB=aG=aH$  compasso 1°, ad  $Aa=Gg=Hh$  compasso 3°; sarà anche ad  $Aa=gh$ ; e la circonferenza sarà divisa in otto parti eguali ne' punti  $B, G, F, H, E, h, f, g$ .

*Dim.* Poichè essendo  $(Aa)^2=2$  (§ 27); sarà  $(Aa)^2=(AG)^2+(aG)^2$ . Sarà dunque retto l'angolo  $aGA$  (48, lib. I). Quindi pel triangolo isoscele  $aGA$  gli altri due angoli  $GAA, GaA$  tra loro eguali (5, lib. I) saranno semiretti (32, lib. I). Dunque l'angolo  $GAF$ , che è lo stesso coll'angolo  $GAA$  (§ 28), sarà la metà di  $BAF$ . Dunque anche l'arco  $GF=BG$ . Ma per costruzione è  $Gg=BF$  (26, lib. III). Dunque tolto di qua e di là  $BG$ ; sarà  $GF=Bg$ . Nello stesso modo si dimostrerà, che gli altri archi sono eguali. Sarà dunque la circonferenza divisa in parti eguali ciascuna alla metà del quadrante, e però in otto.

31. *Prob.* Dividere la circonferenza in dodici parti eguali.

*Sol.* Stanti le cose come nel § 27 (fig. 9), si faccia ad  $AB$

$= FN = Nn = FO = Oo$ . Sarà la circonferenza divisa in dodici parti eguali ne' punti  $B, N, C, F, D, O, E, o, d, f, c, n$ .

*Dim.* Poichè tolti via gli archi eguali  $BC, DE$  dagli eguali  $BF, FE$ ; gli archi, che rimangono  $CF, FD$  saranno eguali. Essendo dunque  $CD$  la sesta parte della circonferenza (§ 29); sarà  $CF$  la sua metà, cioè la duodecima. Sarà ancora  $CF = CN$  a cagione di  $FN = CD$ ; così pure  $CN = NB$  a cagione di  $FN = CB$ . E nella stessa guisa si dimostrerà, che tutte le altre sono duodecime parti della circonferenza.

32. *Prob.* Dividere la stessa circonferenza in ventiquattro parti eguali.

*Sol.* Stanti le stesse cose come sopra (fig. 9) (§ 30 e 31); si faccia ad  $AB = GL = LM = Gk = ki = HI = IK = Hm = ml$  compasso 1° e sarà fatto.

*Dim.* Poichè se dagli archi eguali  $GF, GB$  (§ 30) si sottraggono gli eguali  $CF, NB$  (§ 31); resteranno eguali  $GC, GN$ ; ed essendo  $CN$  una duodecima parte della circonferenza (§ 31); saranno  $GC, GN$  ventiquattresime parti di essa. Essendo poi  $FN = GL$ ; tolto via  $FG$ ; sarà  $NG = FL$ . Dunque anche  $FL$  sarà una ventiquattresima e la metà di  $FD$  (§ 31). Nello stesso modo si dimostrerà essere eguali a questi gli archi  $DH, HO, FI, IC$ , così tutti gli altri determinati qui sopra.

33. Noi ci siamo qui serviti senza citarle delle Prop. 26 e 27 del lib. III d'Euclide, che in un cerchio o in cerchj eguali le rette eguali sottendono archi eguali; il che faremo anche in seguito per brevità.

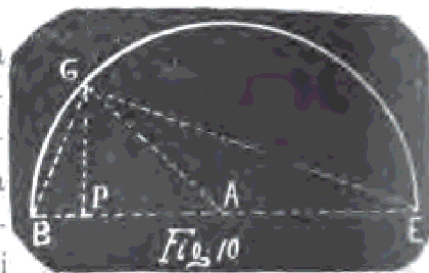
34. Gli antichi per via del centro  $A$  col raggio  $AB$  e col solo compasso divisero la circonferenza in sei parti eguali. Le altre divisioni le ottenevano col compasso e colla riga, prendendo varj punti fuori della circonferenza. Ora noi abbiamo trovato un punto  $a$  tale, che solo basta a dividere la circonferenza in ventiquattro parti eguali col solo compasso. Il che è nello stesso tempo più spedito e comodo, e porta ad una divisione pratica molto più accurata dell'antica.

35. Può sembrare elegante la serie delle aperture de' tre compassi, che bastano a questa divisione. Poichè si trova l'apertura del primo  $= \sqrt{1}$ , del secondo  $= \sqrt{2}$ , del terzo  $= \sqrt{3}$ .

36. *Lemma.* Se nel cerchio  $BGE$  sia il raggio  $AB = 1$ ; sia

poi l'arco  $BG$  un'ottava parte della circonferenza; sarà il quadrato della sua corda  $BG$ , ossia  $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$  (fig. 10).

*Dim.* Sul diametro  $BE$  si cali la perpendicolare  $GP$ . Nel triangolo rettangolo  $GPA$  a cagione dell'angolo semiretto  $GAP$  sarà semiretto ancora  $AGP$  (32, lib. I). Saranno dunque eguali i lati  $GP$ ,  $PA$  (6, lib. I). È poi  $(AG)^2 = (PG)^2 + (AP)^2$  (47, lib. I). Dunque  $(AG)^2 = 2(AP)^2$ ; quindi  $2(AG)^2 = 4(AP)^2$ , ossia  $2 = (2AP)^2$ , e quindi  $\sqrt{2} = 2AP$ ;  $AP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ;  $BP = AB - AP = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ . Si ha poi, essendo retto l'angolo  $BGE$  (31, lib. III),  $BP : BG :: BG : BE$  (8, 4, lib. VI); quindi (17, lib. VI)  $(GB)^2 = BP \cdot BE = 2BP$ . Dunque  $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$ .

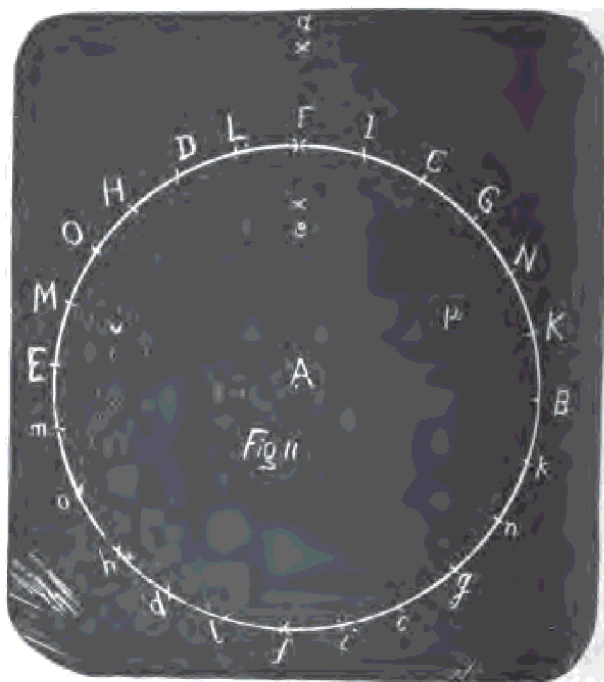


37. *Lemma.* Stanti le stesse cose del § 36, sarà il quadrato della  $GE$  corda di tre ottave parti della circonferenza, ossia  $(GE)^2 = 2 + \sqrt{2}$ .

*Dim.* Poichè sarà  $(BE)^2 = (GE)^2 + (BG)^2$  (47, lib. I). Ma  $(BE)^2 = 4$ ;  $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$  (§ 36). Dunque  $4 = (GE)^2 + 2 - \sqrt{2}$ , e togliendo 2, aggiungendo  $\sqrt{2}$ , si avrà  $2 + \sqrt{2} = (GE)^2$ .

38. *Prob.* Essendosi già divisa la circonferenza in ventiquattro parti (§ 32) eguali; suddividerla in quarantotto.

*Sol.* Si faccia ad  $aN = Be = Ee$  (§ 11) compasso  $4^\circ$ ; ad  $AB = e\mu = ev$  compasso  $1^\circ$ . Saranno  $K\mu$ ,  $\mu N$ ,  $Mv$ ,  $vO$  (fig. 11) quarantottesime parti della circonferenza.



*Dim.* Se si concepiscono guidate le rette  $Aa$ ,  $Nu$ ,  $aN$ ,  $aB$  (§ 12); essendo retto

l'angolo  $B\hat{A}a$  (§ 27); e l'angolo  $B\hat{A}N = B\hat{A}n$  (§ 31), e i tre raggi  $AN$ ,  $AB$ ,  $An$  eguali; sarà  $(aN)^2 = (aB)^2 - Nn$ .  $Aa$  (§ 20); però a cagione di  $aN = Be$ , sarà pure  $(Be)^2 = (aB)^2 - Nn$ .  $Aa$ . Essendo poi i triangoli  $eAB$ ,  $eAE$  a cagione de' lati rispettivamente eguali, rettangoli in  $A$  (8 e 13, lib. I); sarà  $(Be)^2 = (AB)^2 + (Ae)^2$  (47, lib. I). E però  $(AB)^2 + (Ae)^2 = (aB)^2 - Nn$ .  $Aa$ . Ma è  $(aB)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2$ . Sarà dunque  $(AB)^2 + (Ae)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2 - Nn$ .  $Aa$ ; quindi sottraendo  $(AB)^2$ , si ha  $(Ae)^2 = (Aa)^2 - Nn$ .  $Aa$ . Ma  $(Aa)^2 = 2$  (§ 27), e  $Nn = 1$ ; essendo  $Nn$  corda d'una sesta della circonferenza (§ 31). Dunque  $(Ae)^2 = 2 - \sqrt{2} =$  al quadrato della corda dell'arco  $BG$ , che è l'ottava parte della circonferenza (§ 30, e 36). Sarà dunque l'arco  $B\mu = \mu G$  (§ 24). Se poi da questi archi si sottraggono gli archi eguali  $BK$ ,  $NG$  (§ 32); saranno gli archi  $K\mu$ ,  $\mu N$  eguali. Essendo dunque l'arco  $KN$  la vigesimaquarta parte della circonferenza (§ 32); saranno le sue metà, ossia gli archi  $K\mu$ ,  $\mu N$ , e per la stessa ragione gli archi  $M\nu$ ,  $\nu O$ , la quarantottesima parte della circonferenza.

39. Stanti le stesse cose potrebbe chi volesse, col solo ajuto dei quattro compassi indicati qui sopra, dividere tutta la circonferenza in quarantotto parti eguali (§ 8), (fig. 11). Poichè se pel primo compasso di apertura  $= AB$  si divida la circonferenza in sei parti cominciando dal punto  $\mu$ , si bipartiranno gli archi  $IF$ ,  $HO$ ,  $mo$ ,  $fl$ ,  $ng$ . Dividendo poi la circonferenza in sei parti cominciando dal punto  $\nu$ , resteranno divisi gli archi  $oh$ ,  $fi$ ,  $nk$ ,  $NG$ ,  $FL$ . Dividendo poi la circonferenza in quattro parti col terzo compasso di apertura eguale ad  $Aa$  cominciando dal punto  $\mu$ , resteranno divisi gli archi  $LD$ ,  $ic$ ; cominciando poi dal punto  $\nu$ , resteranno divisi gli archi  $IC$ ,  $Id$ . In seguito dividendo la circonferenza in sei parti eguali di nuovo col primo compasso, ma cominciando dagli ultimi punti trovati col terzo compasso, resteranno divisi per metà tutti gli altri archi.

La dimostrazione è simile a quella del § 32.

40. *Prob.* Dividere la circonferenza  $BDd$  in cinque parti eguali.





(§ 12, 13, 14); così  $(Nb)^2 = (Aa)^2 = 2$  (§ 27). Laonde  $(Xb)^2 = (Nb)^2 - (NX)^2$  (47, lib. I)  $= 2 - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ . Ma per l'angolo retto  $XAB$  lo stesso che  $FAB$  si ha  $(BX)^2 = (AB)^2 + (AX)^2$  (47, lib. I).

Ed è  $(AX)^2 = \frac{1}{4} (AF)^2$  (per Coroll. Prop. 4 del II). Sarà dunque  $(BX)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = (Xb)^2$ . Dunque le rette  $BX$ ,  $Xb$  sono eguali. Sarà dunque questo punto  $b$  quello stesso, che adopera Tolommeo nel primo Libro dell' Almagesto per iscrivere un pentagono, e un decagono equilatero ed equiangolo nel cerchio. Vedi la dimostrazione del Clavio nello Scolio alla Prop. 10 del Libro XIII d'Euclide. Vedi ancora i numeri seguenti (§ 45 ecc.), dai quali risulterà la dimostrazione intera di questa Proposizione e delle seguenti.

41. *Prob.* Dividere la circonferenza in dieci parti eguali.

*Sol.* Stanti le cose come nel Problema precedente (§ 40), si faccia ad  $Ab = BP$ , sarà  $BP = PQ$ , archi eguali alla decima parte della circonferenza (fig. 12).

*Dim.* Vedi 10, lib. XIII d'Eucl.

42. *Prob.* Dividere la circonferenza in centoventi parti eguali.

*Sol.* Stanti le cose come ne' Problemi §§ 32 e 40, sarà  $QI$  la centovesima parte della circonferenza (fig. 12).

*Dim.* Poichè l'arco  $BI$  è eguale a cinque ventiquattresime della circonferenza (§ 32), e l'arco  $BQ$  eguale a una quinta.

$$\text{Dunque } QI = BI - BQ = \frac{5}{24} - \frac{1}{5} = \frac{25 - 24}{120} = \frac{1}{120}.$$

43. Potrà chi voglia con soli quattro compassi, ossia quattro aperture d'un compasso, e con soli due punti presi fuori della circonferenza, cioè coi soli due punti  $a$  e  $b$ , dividere la circonferenza del cerchio in centoventi parti eguali.

Poichè col punto  $a$ , e con tre compassi avendo divisa la circonferenza in 24 parti (Probl. § 32), e avendo trovato il punto  $b$  (§ 40); si faccia col quarto compasso ad  $Ab = BP = PQ = QR = RS$ , a cui sarà pure eguale  $SE$  (§ 41). Ora per dividere l'arco  $NG$  in cinque parti eguali, ciascuna delle quali sarà una centovesima; si faccia ad  $Ab = Lq = qp = i\pi = Op = \rho\omega = \omega\varphi$ . Si

avrà diviso l'arco  $NG$  in cinque parti eguali. Nello stesso modo si potranno dividere tutti gli altri archi  $GC$ ,  $CI$ , ecc.

*Dim.* Poichè essendo  $BQ=RE$ ;  $BF=FE$ ;  $IF=FL$ ; sarà anche  $IQ=LR$ , ed essendo  $Lq=QR$ ; sarà anche  $Qq=LR=QI$ . Nello stesso modo essendo  $QP=qp$ ; sarà anche  $Qq=Pp=QI$ . Parimente a cagione di  $I\pi=QP$ , sarà  $\pi P=QI$ . Essendo poi  $O\omega=BQ$ ;  $OI=IB$ ; sarà ancora  $I\omega=QI$ . Inoltre a cagione di  $\omega\varphi=I\pi$ ; sarà  $I\omega=\varphi\pi=QI$ . Essendo poi  $O\varphi=Op+\rho\omega+\omega\varphi=BP+PQ+QR=BR$ , tolti di qua e di là gli archi eguali  $OG$ ,  $BL$ ; si avrà il residuo  $G\varphi=LR=QI$ . Finalmente a cagione di  $BI=LN$ , tolti gli archi eguali  $BQ$ ,  $Lp$ , sarà il residuo  $QI=Np$ . Si sarà dunque diviso l'arco  $NG$  ne' cinque archi  $Np$ ,  $pP$ ,  $P\pi$ ,  $\pi\varphi$ ,  $\varphi G$  eguali ciascuno all'arco  $QI$ , e però eguali tra loro. Essendo poi  $NG$  una ventesimaquarta della circonferenza (§ 32), sarà ogni sua quinta parte una centovesima della circonferenza.

44. Abbiamo dunque ormai diviso col solo compasso la circonferenza in tutte quelle parti eguali, le quali si ottenevano dagli antichi inscrivendo al cerchio i cinque poligoni regolari triangolo, quadrato, pentagono, esagono e decagono, impiegando insieme il compasso e la riga. È poi riuscito di sommo comodo l'aver potuto ottenere tutto ciò coll'assumere solamente due punti fuori della circonferenza cioè  $a$ , e  $b$ , e coll'impiegare solamente quattro aperture di un compasso, ossia quattro compassi (§ 43, 8). Chi vorrà fare il confronto di questo metodo, col metodo conosciuto potrà giudicare della sua semplicità e speditezza, e della sua precisione nella pratica.

45. Essendo pel § 40

$$Xb+XF=Fb=Xb+XA$$

$$Ab=Xb-XA$$

$$\text{sarà} \quad Fb \cdot Ab = (Xb)^2 - (XA)^2 \\ = (XB)^2 - (XA)^2 = (AB)^2$$

ossia  $Fb \cdot Ab = (FA)^2$ ; quindi la  $Fb$  sarà divisa in  $A$  in estrema e media ragione (30, lib. VI).

46. Sarà quindi  $Fb \cdot Ab = (FA+Ab) \cdot Ab = (fA)^2 = (fA+Ab) \cdot Ab = fA \cdot Ab + (Ab)^2 = fA \cdot (fA-fb) + (Ab)^2 = (fA)^2 - fA \cdot fb + (Ab)^2$ . Avendosi dunque  $(fA)^2 = (fA)^2 - fA \cdot fb + (Ab)^2$ , tolto  $(fA)^2$ , e aggiunto  $fA \cdot fb$ ; si avrà  $fA \cdot fb = (Ab)^2$ . Quindi anche la  $Af$  sarà divisa in  $b$  in estrema e media ragione.

47. Se col centro  $f$ , raggio  $bA$  si tagli la circonferenza in  $T$ ; sarà  $Tf = Tb = bA$ . Poichè si avrà  $fA \cdot fb = (Ab)^2$  (§ 46)  $= (Tf)^2$ . E quindi (17, lib. VI)  $fA : fT :: fT : fb$ . Dunque i due triangoli  $fAT$ ,  $fbT$ , che hanno l'angolo comune in  $f$ , avranno i lati che lo contengono proporzionali; e quindi (6, lib. VI), saranno simili. Sarà dunque isoscele anche il triangolo  $fbT$ , e sarà  $Tb = Tf$ .

48. L'angolo  $TbA = Tfb + bTf$  (32, lib. I)  $= Tbf + bAT$ , e aggiungendo  $Tbf$ ; sarà  $TbA + Tbf = 2Tbf + bAT$ ; ma  $TbA + Tbf =$  due retti (13, lib. I). Dunque  $2Tbf + bAT =$  due retti. Ma  $Tbf = bAT + bTA$  (32, lib. I)  $= 2bAT$  (5, lib. I). Dunque  $2Tbf + bAT = 5bAT =$  due retti. Quindi l'angolo  $bAT$ , che è lo stesso coll'angolo  $fAT$ , sarà una quinta di due retti, e l'arco  $fT$  una decina della circonferenza.

49. Se si piglia la corda  $ft = fT$ ; sarà pure  $bt = ft$  (§ 47), e le due  $tT$ ,  $bf$  si taglieranno per metà ad angoli retti in un punto  $y$  (§ 14); e sarà  $(Tf)^2 = (Ty)^2 + (fy)^2$ ; quindi  $4(Tf)^2 = 4(Ab)^2 = 4(Ty)^2 + 4(fy)^2 = (Tt)^2 + (fb)^2$ ; quindi  $(Tt)^2 = 4(Ab)^2 - (fb)^2$ . Ma  $(fb)^2 = (fA - Ab)^2 = (fA)^2 - 2fA \cdot Ab + (Ab)^2$ . Dunque  $(Tt)^2 = 3(Ab)^2 - (fA)^2 + 2fA \cdot Ab$ . Ora  $2fA \cdot Ab = 2fA \cdot (fA - fb) = 2(fA)^2 - 2fA \cdot fb = 2(fA)^2 - 2(Ab)^2$ . Dunque  $(Tt)^2 = 3(Ab)^2 - (fA)^2 + 2(fA)^2 - 2(Ab)^2 = (fA)^2 + (Ab)^2 = (BA)^2 + (Ab)^2 = (Bb)^2$ ; e quindi  $Tt = Bb$ . Ma  $Tt$  è corda di due decime, ossia d'una quinta parte della circonferenza. Quindi anche  $Bb$ . Quindi

50. Nel triangolo rettangolo  $ABb$  il quadrato del lato del pentagono è eguale alla somma de' quadrati dei lati dell' esagono e del decagono. Questa è la 10, lib. XIII d'Eucl.

51. I lati del triangolo rettangolo  $ABb$  sono corde di archi, che sono in progressione contrarmonica. Poichè questi archi sono  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{10}$  della circonferenza. Si trova poi

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} : \frac{1}{6} - \frac{1}{10} :: \frac{1}{10} : \frac{1}{5}.$$

52. Essendo  $fb : bA :: bA : Af$  (§ 46); è ancora  $fb : bA :: bA : AF$ ; e quindi il diametro  $Ff$  resta diviso ne' punti  $A$  e  $b$  in tre parti continuamente proporzionali.

53. *Prob.* Dividere la circonferenza in venti parti, ossia trovare una ventesima parte di essa.

*Sol.* Stando le cose come al § 40; nel quadrante  $BVf$  si faccia a  $Bb=fV$ . Sarà l'arco  $BV$  una ventesima.

$$\text{Dim. Poichè è } BV=Bf-fV=\frac{1}{4}-\frac{1}{5} \text{ (§ 40)}=\frac{1}{20}.$$

*Altra Sol.* Stando pure le cose come al § 40; nel quadrante  $BVf$  si faccia ad  $AB=bV$ . Sarà l'arco  $BV$  una ventesima.

*Dim.* Essendo  $Ab$  corda d'una decima; sarà l'arco  $BV$  la metà d'una decima, ossia una ventesima (§ 24).

54. A cagione di  $Vb=VA$  il triangolo  $AVb$  è isoscele come  $bTf$ . Inoltre essendo  $FA:Ab::Ab:bf$  (§ 52), ossia sostituendo valori eguali  $VA:Ab::Tb:bf$ ; i due triangoli isosceli avranno i lati proporzionali; quindi saranno simili (6, lib. VI).

55. Essendo pure  $bF:FA::FA:Ab$  (§ 45; e 17, lib. VI); sostituendo valori eguali, si avrà  $bF:bV::bV:Ab$ . E però nei due triangoli  $bFV$ ,  $bVA$  si avranno i lati proporzionali, che formano l'angolo comune in  $b$ . e però i triangoli saranno simili (6, lib. VI). Sarà dunque isoscele anche il triangolo  $bFV$ , e sarà  $FV=Fb$ .

56. Essendo l'arco  $fV$  una quinta (§ 53);  $fT$  una decima (§ 47); sarà pure  $TV$  una decima; quindi la corda  $TV=Tf==Tb=bA$ . Ma è anche  $Vb=TA$  (§ 53). Dunque i due triangoli  $V Tb$ ,  $TbA$  avranno tutti i lati rispettivamente eguali, e saranno eguali (8, 4, lib. I).

57. *Prob.* Dividere una circonferenza in 240 parti eguali.

*Sol.* Stanti le cose come al § 43 (fig. 12) per mezzo dei §§ 38 e 39 si divida egualmente in due l'arco  $NG$  in  $\delta$ . Si può far questo facendo al raggio del cerchio  $ev$  eguali le corde  $v\beta$ ,  $\beta\delta$ . Saranno i due archi  $P\delta$ ,  $\delta\pi$  ciascuno una ducentoquarantesima. Vedi ancora § 58.

*Dim.* Poichè sottraendo dalle due metà  $N\delta$ ,  $G\delta$  gli archi eguali  $NP$ ,  $G\pi$  (§ 43); resterà  $P\delta=\delta\pi$ . Ma  $P\pi$  è una centoventesima (§ 43); dunque ecc.

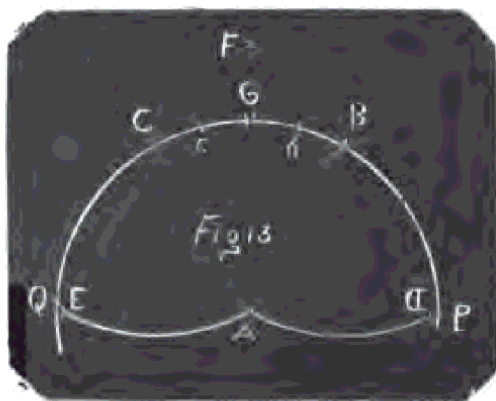
58. Con una apertura di compasso presa dal punto  $\delta$  ad un qualunque punto per esempio  $N$  della divisione già ottenuta al § 43, si potrà proseguire a dividere in due tutte le parti centoventesime di quel §. Per esempio, con questa apertura fatto centro in  $p$  si dividerà l'arco  $\pi\varphi$ ; fatto centro in  $P$ , si dividerà l'arco  $\varphi G$ , e così via via.



59. I tre punti  $a$ , e  $b$  (fig. 12), ed  $e$  (fig. 11) sono sommanente osservabili. Poichè col mezzo di que' soli presi fuori della circonferenza abbiamo diviso la stessa in ducentoquaranta parti eguali, e siamo pure arrivati a determinare una ducentoquarantesima parte per via di sole cinque aperture di compasso, cioè  $AB$ ,  $BD$ ,  $Aa$ ,  $aN$ ,  $Ab$ . Potendo questi servire ad altri molti usi insigni nel seguito; troveremo per rapporto ad essi tre equazioni fondamentali, dalle quali ne ricaveremo a suo luogo altre dodici, e ne dimostreremo gli usi, quando ne verrà l'occasione.

60. *Prob.* Dividere un qualunque arco  $BC$  in due parti eguali in  $G$ , (Fig. 13).

*Sol.* Col raggio  $AB$ , col quale è stato descritto l'arco  $BC$ , che si deve dividere, e coi centri  $B$  e  $C$ , che sono i due punti estremi dell'arco, si descrivano gli archi  $AD$ ,  $AE$ . Si faccia a  $BC=AD=AE$  (§ 10). Poi coi centri  $D$  ed  $E$ , e col raggio  $DC=BE$  si descrivano due archi, che si tagliano in  $F$ . Ora col raggio  $AF$ , e cogli stessi centri  $D$  ed  $E$  si descrivano due altri archi, che si tagliano in  $G$ . Sarà il punto  $G$  nella circonferenza, e sarà l'arco  $BG=GC$ .



*Dim.* Essendo eguali i lati rispettivamente nei tre triangoli  $DBA$ ,  $BAC$ ,  $ACE$ ; sarà l'angolo  $BCA = CAE$  (8, lib. I). Quindi  $BC$  parallela ad  $AE$  (28, lib. I). Quindi  $BAEC$  sarà un parallelogrammo (33, lib. I). Nella stessa maniera si proverà, che è un parallelogrammo  $BCAD$ . Si ha poi nel parallelogrammo  $BCAD$  la diagonale  $AB$  eguale ai lati opposti  $BD$ ,  $AC$ . Dunque il quadrato della diagonale  $DC$  sarà eguale alla somma del quadrato dell'altra diagonale  $AB$  e de' due quadrati de' due lati  $AD$ ,  $BC$  (§ 25); ossia sarà  $(DC)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2$ . Essendo poi alla retta  $BC$  parallele le due  $DA$ ,  $AE$ ; i punti  $D$ ,  $A$ ,  $E$  saranno nella stessa retta. In oltre avendo i triangoli  $FAD$ ,  $FAE$  tutti i lati eguali; saranno eguali gli angoli  $FAD$ ,  $FAE$  (8, lib. I), e però entrambi retti (13, lib. I). Sarà dunque



$(DF)^2 = (AD)^2 + (AF)^2$ ; ma  $(DF)^2 = (DC)^2$ . Dunque  $(AD)^2 + (AF)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2$ ; e tolto  $(AD)^2$  sarà  $(AF)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$ . Ma  $(AF)^2 = (DG)^2$ . Dunque  $(DG)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$ . Ma perchè i triangoli  $GAD$ ,  $GAE$  hanno i lati eguali; gli angoli  $GAD$ ,  $GAE$  sono eguali, e retti (8 e 13, lib. I). Dunque  $(DG)^2 = (AG)^2 + (AD)^2$ . Dunque  $AB = AG$ ; e però il punto  $G$  è nella circonferenza. Tolti poi dagli angoli retti  $GAD$ ,  $GAE$  gli angoli eguali  $BAD$ ,  $CAE$ ; gli angoli  $BAG$ ,  $GAC$  restano eguali. Dunque l'arco  $BC$  si è diviso egualmente in due in  $G$  (33, lib. VI).

61. *Avv.* Se l'arco da dividersi fosse assai piccolo come  $bc$  (fig. 13), sarebbe meglio in pratica aggiungervi di qua, e di là archi eguali un poco grandi, come  $bB$ ,  $cC$ , e tagliare poi per mezzo l'arco  $BC$  in  $G$ , dove sarà pure diviso per mezzo l'arco  $b c$ .

62. Se l'arco da dividersi fosse troppo grande come  $PGQ$  (fig. 13), sarebbe spedito toglier da esso di qua e di là archi eguali  $PB$ ,  $QC$ , acciocchè riuscisse mediocre l'arco di mezzo  $BC$ ; quindi divider questo per metà in  $G$ , dove resterà pure diviso per metà l'arco  $PGQ$ .

63. Ecco dunque che tutto ciò, che appartiene alle divisioni della circonferenza, o degli archi del cerchio, e che si può eseguire col compasso e colla riga, si può ancora ottenere col compasso solo.

## LIBRO TERZO

### DELLA MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE DELLE DISTANZE IN LINEA RETTA

64. *Prob.* Duplicare la distanza  $AB$  (fig. 2).

*Sol.* Col centro  $A$ , raggio  $AB$  si descriva una semicirconfenza  $BCDE$ ; cioè si faccia ad  $AB = BC = CD = DE$  (§ 10). Sarà la  $BAE$  retta, e doppia della  $AB$ .

*Dim.* Vedi la 15, lib. IV.

65. *Prob.* Triplicare, quadruplicare ecc. una distanza  $AB$ .

*Sol.* Alla  $AB$  (fig. 1) si aggiunga l'eguale  $AE$  (§ 64). Collo stesso metodo s'aggiunga l'eguale  $EV$  ecc. Sarà la  $BAEV$  retta eguale a 3  $AB$ . Collo stesso metodo seguitando si quadruplicherà ecc.

*Dim.* La  $BAE$  è retta (15, lib. IV); istessamente la  $AEV$ ; dunque ecc. ecc.

66. *Prob.* Dividere in due parti eguali la distanza  $AB$ , ossia trovare il punto  $M$ , che è sulla retta  $AB$  alla sua metà.

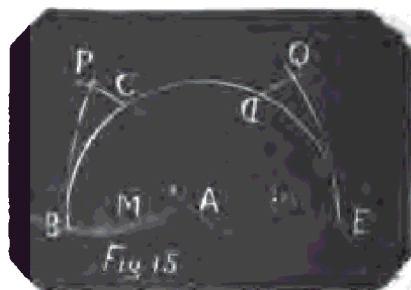
*Sol. I.* Descritta la semicirconfenza  $BCDE$  (§ 64) (fig. 14), col centro  $E$ , raggio  $EB$  si descriva un arco indefinito  $PBp$ . Col centro  $B$ , raggio  $BA$  si descriva la semicirconfenza  $pAP_m$ . Col centro  $P$ , raggio  $PB$  si descriva l'arco  $BM$ . Si faccia a  $Pm = BM$ . Sarà  $M$  il punto cercato.

*Dim.* La retta  $Bm$  sarà sulla continuazione della  $Bp$  (15, lib. IV). Sostituendo le tre eguali  $BP$ ,  $Bp$ ,  $Bm$  alle tre eguali  $Ap$ ,  $pB$ ,  $pS$  del § 22,



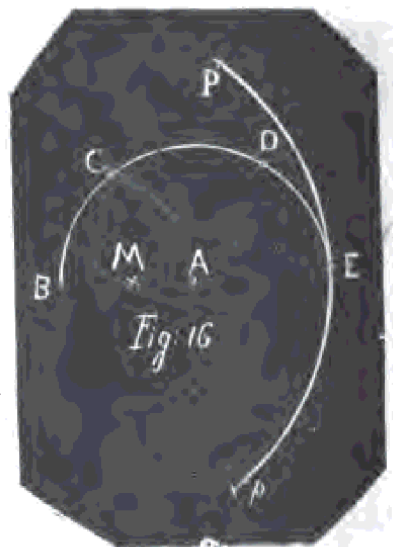
e le tre  $PE$ ,  $BE$ ,  $pE$  alle tre  $AQ$ ,  $pQ$ ,  $BQ$ , e la  $Pm$  alla  $AS$ ; l'equazione  $AS \cdot pQ = (Ap)^2$  del § 22, si cangerà nella  $Pm$ .  $BE = (BP)^2$ ; ed essendo  $BE = 2AB$ ;  $BP = AB$ ; sarà  $2AB$ .  $Pm = (AB)^2$ , e dividendo per  $AB$ ;  $2Pm = AB = 2BM$ . Sarà poi il triangolo  $BPM$  d'angoli eguali al triangolo  $BPm$  (8, lib. I). Quindi  $mP$  parallela alla  $BM$  (28, lib. I). Ma anche i due triangoli  $BPm$ ,  $BPE$  hanno gli angoli eguali (§ 22). Dunque  $mP$  è parallela alla  $BE$  (28, lib. I). Dunque le rette  $BM$ ,  $BE$  coincidono.

*Sol. II.* Col raggio  $AB$ , centro  $A$  si descriva la semicirconfenza  $BCDE$  (§ 64) (fig. 15). Collo stesso raggio, e coi centri  $B$  ed  $E$  si segnino due archi indefiniti  $CP$ ,  $DQ$ . Cogli stessi centri  $B$  ed  $E$ , e col raggio  $BE$  si segnino i due archi  $EQ$ ,  $BP$ . Col centro  $P$ , raggio  $PB$  si descriva l'arco  $BM$ . Col centro  $E$ , raggio  $PQ$  si tagli l'arco  $BM$  in  $M$ . Sarà  $M$  il punto cercato.



*Dim.* Fatte le debite sostituzioni nella Fig. 5 (§ 23); si avrà  $PQ \cdot BE = (BE)^2 - (BP)^2$ ; ed essendo  $BE = 2AB$ ;  $BP = AB$ ;  $PQ = ME$ ; sarà  $2ME \cdot AB = 4(AB)^2 - (AB)^2 = 3(AB)^2$ . Quindi dividendo per  $AB$ , si avrà  $2ME = 3AB$ . Ma per essere eguali i lati opposti, sarà  $PQEM$  un parallelogrammo. Poichè diviso in due triangoli di lati eguali colla diagonale  $QM$  dà l'angolo  $PQM = QME$  (8, lib. I), e quindi  $PQ$  parallela ad  $ME$  (28, lib. I), così  $PM$  a  $QE$  (33, lib. I). È poi anche  $PQ$  parallela alla  $BE$  (§ 23). Dunque  $ME$ ,  $BE$  coincidono. Essendo dunque perciò  $ME = MA + AE = MA + AB$ ; sarà  $2ME = 2MA + 2AB = 3AB$ ; quindi  $2MA = AB$ .

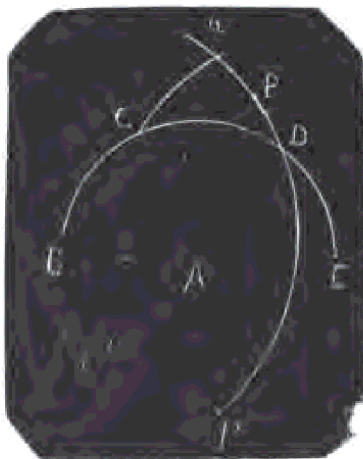
*Sol. III.* Col centro  $A$ , raggio  $AB$  si descriva la semicirconfenza  $BCDE$  (§ 64) (fig. 16). Col centro  $B$ , raggio  $BE$  si descriva l'arco indefinito  $PEp$ . Col centro  $E$ , raggio  $EC$  si tagli quello in  $P$  e  $p$ . Coi centri



$P$  e  $p$ , e collo stesso raggio  $PE$  si descrivano due archi, che si taglino in  $M$ . Sarà  $M$  il punto cercato.

*Dim.* Il punto  $M$  sarà sulla retta  $BE$  (§ 13); e sostituendo nell'equazione (§ 19)  $pP$ .  $pQ = (Ap)^2$  le distanze, ossia le rette corrispondenti di questa Figura, ne verrà l'equazione  $EM \cdot EB = (PE)^2$ . Quindi a cagione di  $(PE)^2 = (EC)^2 = 3(AB)^2$  (12, lib. XIII) (§ 2), si avrà  $2AB \cdot EM = 3(AB)^2$ , e dividendo per  $AB$ ;  $2EM = 3AB$ ; ovvero  $2AE + 2AM = 3AB$ ; e tolte le quantità eguali  $2AE$ ,  $2AB$ , risulta  $2AM = AB$ .

*Sol. IV.* Descritta la semicirconfenza  $BCDE$  (§ 64), col centro  $B$ , e col raggio  $BD$  (fig. 17) si descriva un arco indefinito  $aDp$ . Collo stesso raggio  $BD$ , centro  $E$  si tagli quest' arco in  $a$ . Col raggio  $Aa$ , e col centro  $E$  si tagli quest' arco  $aDp$  in  $P$ , e  $p$ . Collo stesso raggio  $Aa$ , e coi centri  $P$  e  $p$  si segnino due archi, che si taglino in  $M$ . Sarà  $M$  il punto cercato.



*Dim.* Il punto  $M$  sarà sulla retta  $BE$  (§ 13). Fatte poi le debite sostituzioni nell'equazione  $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ$ .  $PQ$  (§ 18), si avrà  $(PB)^2 = (PE)^2 + EB \cdot MB$ ; ossia  $(BD)^2 = (Aa)^2 + 2AB \cdot MB$ ; ossia  $3(AB)^2$  (12, lib. XIII) (§ 2)  $= 2(AB)^2$  (§ 27)  $+ 2AB \cdot MB$ . Quindi sottraendo  $2(AB)^2$ , risulta  $AB = 2MB$ .

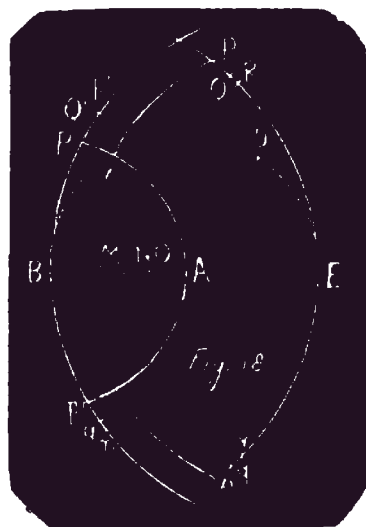
Molte altre soluzioni si possono dare a questo Problema o adoperando nuovi raggi di cerchio, o combinando tra loro le soluzioni date qui sopra; ma stimo superfluo indicarle. Una assai semplice, ma che però in pratica non conduce a molta esattezza, perchè in essa l'intersezione degli archi si fa ad un angolo troppo acuto, è la seguente:

*Sol. V.* Col raggio  $AB$ , centro  $A$  (fig. 14) descritta la semicirconfenza  $BCDE$  (§ 64); col centro  $E$ , raggio  $EB$  descritto l'arco indefinito  $PBp$ ; col centro  $B$ , raggio  $BA$  tagliando quest'arco in  $P$  e  $p$ ; con questi centri  $P$  e  $p$ , e collo stesso raggio  $BA$  si descrivano due archi, che si taglino in  $M$ . Sarà  $M$  il punto cercato.

*Dim.* Il punto  $M$  sarà sulla  $BE$  (§ 13). Essendo poi simili i due triangoli isosceli  $PBM$ ,  $PBE$  a cagione d'un angolo alla base comune in  $B$  (5 e 32, lib. I; 4, lib. VI); sarà  $BE:BP::BP:BM$ ; quindi (17, lib. VI)  $BE \cdot BM = (BP)^2 = (AB)^2$ , ossia  $2AB \cdot BM = (AB)^2$ ; quindi dividendo per  $AB$ , risulta  $2BM = AB$ .

67. *Prob.* Proseguire a suddividere in due parti eguali colla più semplice costruzione (fig. 18), la  $AM$  in  $N$ ; la  $AN$  in  $O$ ; ecc. all'infinito.

*Sol. I.* Essendo stata descritta la semicirconferenza  $BCDE$  col raggio  $AB$  (§ 64), e collo stesso raggio, e col centro  $B$  l'arco indefinito  $P'CAp'$ ; coi centri  $E$  e  $B$ , e col raggio  $BE$  i due archi  $R'Q'P'Bp'q'r'$ ,  $PQRErqp$ ; col centro  $E$ , raggio  $EC$  l'arco  $PCp$ ; se coi centri  $P'$  e  $p'$ , raggio  $AB$  si descrivano due archi; essi si taglieranno in  $M$  al mezzo della  $AB$  (Sol. V, § 66). Se coi due centri  $P$  e  $p$ , raggio  $PE$  si descrivano due archi; essi si taglieranno pure nel medesimo punto  $M$  (Sol. III, § 66).



Ora si faccia ad  $AP' = BQ' = Bq' = q'N = Q'N$  (§ 11). Sarà il punto  $N$  alla metà della  $AM$ .

Si faccia ad  $AQ' = BR' = Br' = r'O = R'O$ . Sarà il punto  $O$  alla metà della  $AN$ .

Seguitando collo stesso metodo, si dividerebbe  $AO$  in due parti eguali ecc. all'infinito.

*Dim.* S'immagini una retta  $P'A$ , che divide in due la base  $BE$  del triangolo  $P'BE$  (§ 12). Sarà  $(BP')^2 + (P'E)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP')^2$  (§ 26). Quindi sostituiti i valori di  $BP' = AB$  e di  $P'E = 2AB$ , e sottratto  $2(AB)^2$ ; si avrà  $3(AB)^2 = 2(AP')^2$ , e quindi dividendo per 2, risulterà  $(AP')^2 = (BQ')^2 = \frac{3}{2}(AB)^2$ . Essendo poi  $N$  nella retta  $BE$  (§ 13); sarà il triangolo isoscele  $Q'BN$  simile al triangolo isoscele  $Q'BE$  a cagione dell'angolo comune in  $B$  (5 e 32, lib. I, e 4, lib. VI). Quindi  $(BQ')^2 = BN \cdot BE$  (17, lib. VI). Quindi paragonando tra loro i due valori di  $(BQ')^2$ , si avrà  $\frac{3}{2}(AB)^2 = BN \cdot BE = 2BN \cdot AB$ , e divi-

dendo per  $2AB$ , si avrà  $\frac{3}{4} AB = BN$ . Dunque  $AN = \frac{1}{4} AB$ .

Istessamente si avrà  $(BQ')^2 + (Q'E)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ')^2$  (§ 26), quindi  $\frac{3}{2} (AB)^2 + 4(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ')^2$ , e riducendo si avrà  $\frac{7}{4} (AB)^2 = (AQ')^2 = (BR')^2$ . Ma  $(BR')^2 = BO \cdot BE = 2AB \cdot BO$ . Dunque  $\frac{7}{4} (AB)^2 = 2AB \cdot BO$ , e quindi  $\frac{7}{8} AB = BO$ ; ed  $AO = \frac{1}{8} AB$ ; ecc.

*Sol. II.* Si faccia ad  $AP = EQ = Eq = qN = QN$ . Sarà il punto  $N$  alla metà della  $AM$ . Si faccia ad  $AQ = ER = Er = rO = RO$ . Sarà il punto  $O$  alla metà della  $AN$ . Seguitando collo stesso metodo si dividerebbe in due la  $AO$ , così via via all' infinito.

*Dim.* Poichè si ha (§ 26)  $(PE)^2 + (PB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$ , e sostituiti i valori di  $(PE)^2 = (CE)^2 = 3(AB)^2$  (12, lib. III) (§ 2), e di  $(PB)^2 = (BE)^2 = 4(AB)^2$ ; si ha  $7(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$ . Quindi tolti via  $2(AB)^2$ , e dividendo per 2, si ha  $\frac{5}{2} (AB)^2 = (AP)^2 = (EQ)^2$ . Ma  $(EQ)^2 = EN \cdot EB$  a cagione de' triangoli isosceli simili  $EQN$ ,  $EQB$  (§ 13) (5 e 32, lib. I, 4 e 17 lib. VI). Dunque  $\frac{5}{2} (AB)^2 = EN \cdot EB = 2EN \cdot AB$ ; e dividendo per  $2AB$  si ottiene  $\frac{5}{4} AB = EN$ ; ed  $AN = \frac{1}{4} AB$ .

Collo stesso metodo ragionando si avrà  $(QE)^2 + (QB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ)^2$ . Quindi  $\frac{5}{2} (AB)^2 + 4(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ)^2$ . Quindi pure  $\frac{9}{4} (AB)^2 = (AQ)^2 = (ER)^2 = EO \cdot EB = 2AB \cdot EO$ . Quindi dividendo per  $2AB$ , si ottiene  $\frac{9}{8} AB = EO$ ; ed  $AO = \frac{1}{8} AB$ ; ecc.

*Sol. III.* Col centro  $A$ , raggio  $AB$  descritta la semicirconferenza  $BCDE$  (§ 64) (fig. 19), collo stesso raggio  $AB$ , e coi centri  $B$  ed  $E$  descritti gli archi  $CP$ ,  $Dp$  indefiniti; cogli stessi centri  $B$  ed  $E$ , e col raggio  $BE$  descritti gli archi  $Epqr$ ,  $BPQR$ ; si sarà potuto trovare il punto  $M$  col fare  $PM = PB$ ;  $EM = Pp$  (Soluz. II, § 66).

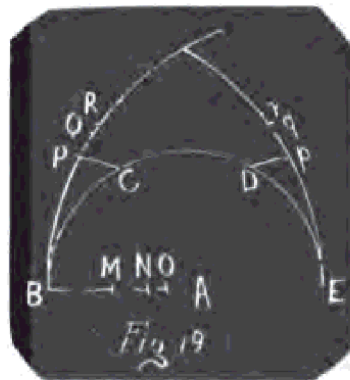
Ora si faccia ad  $AP = BQ = QN = Eq$ . Si faccia pure a  $Qq = EN$ .

Sarà il punto  $N$  alla metà della  $AM$ .

Si faccia parimente ad  $AQ = BR = RO = Er$ . Si faccia pure ad  $Rr = EO$ .

Sarà il punto  $O$  alla metà della  $AN$ . Ecc.

*Dim.* Fatte le dovute sostituzioni nella Fig. 5 (§ 23); si





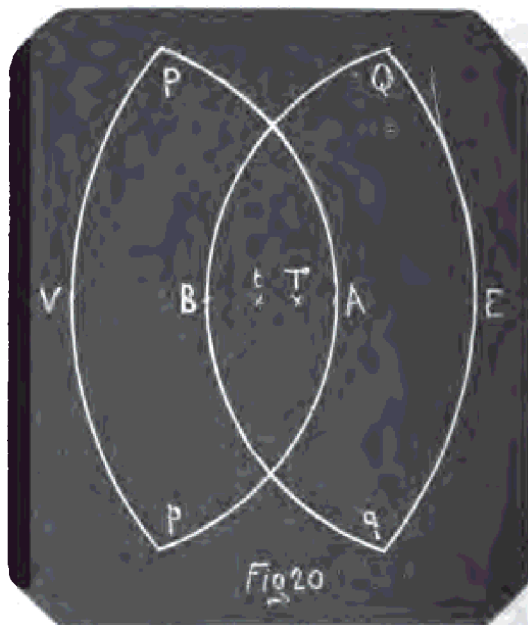
avrà  $Qq$ .  $BE = (BE)^2 - (BQ)^2$ . Ma  $BE = 2AB$ ;  $(BQ)^2 = \frac{3}{2} AB^2$  (Vedi la dimostr. della Sol. I). Dunque  $2Qq \cdot AB = 4(AB)^2 - \frac{3}{2} (AB)^2$ , e dividendo per  $2AB$ , e riducendo si ha  $Qq = \frac{5}{4} AB$ . Dunque anche  $EN = \frac{5}{4} AB$ . Dunque essendo la  $AB$  la stessa nelle due Figure 18 e 19, saranno pure gli stessi i lati dei due triangoli  $Q'NE$  Fig. 18,  $QNE$  Fig. 19. Quindi sovrapponendo i tre punti  $B, Q, E$  della Fig. 19 sopra i tre  $B, Q', E$  della 18, anche i punti  $N$  delle due Figure coincideranno. Dunque ecc.

Istessamente facendo le dovute sostituzioni nella Fig. 5 (§ 23), si ha  $Rr \cdot BE = (BE)^2 - (BR)^2$ . Ma  $(BR)^2 = \frac{7}{4} (AB)^2$  (Dimostr. della Soluz. I); dunque  $Rr \cdot BE = (BE)^2 - \frac{7}{4} (AB)^2$ . Ovvero sostituendo  $2AB$  a  $BE$ ;  $2AB \cdot Rr = 4(AB)^2 - \frac{7}{4} (AB)^2$ . E dividendo per  $2AB$ , e riducendo si ha  $Rr = \frac{9}{8} AB = OE$ . Dunque coincidendo i punti  $E, R, B$  di questa Fig. 19 coi punti  $E, R', B$  della Fig. 18, ed essendo qui le  $RO$  ed  $EO$  eguali rispettivamente alle  $R'O, EO$  della Fig. 18; coinciderà anche il punto  $O$ . Quindi  $O$  sarà alla metà di  $AN$ . Nella stessa guisa si dimostrerebbe in seguito fino all'infinito.

Si potrebbero usare altre maniere di trovare gli stessi punti; ma passeremo ad altre divisioni della  $AB$  in un diverso numero di parti.

68. *Prob.* Dividere in tre parti eguali la distanza  $AB$ .

*Sol.* Alla  $AB$  si aggiungano in linea retta di qua e di là le due distanze  $AE, BV$  eguali alla  $AB$  (§ 64) (Fig. 20). Coi centri  $E$  e  $V$ , e col raggio  $EV$  si descrivano due archi indefiniti  $QEq, PVp$ . Cogli stessi centri  $E$  e  $V$ , e col raggio  $EB$  si descrivano due altri archi, che tagliano i primi in  $Q, q, P, p$ . Con questo stesso raggio  $EB$ , e coi centri  $P, p$  si descrivano due archi, che si tagliano in  $t$ . Collo stesso raggio, e coi centri

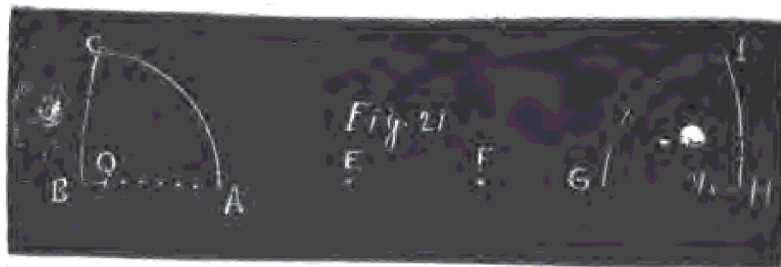


$Q, q$  si descrivano due archi, che si taglino in  $T$ . Sarà la  $AB$  divisa in tre parti ne' due punti  $T, t$ .

*Dim.* I punti  $T, t$  saranno nella retta  $VE$  (§ 13). Sarà poi il triangolo isoscele  $EQT$  simile all' isoscele  $EQV$ , avendo un angolo comune in  $E$  (5 e 32, lib. I, 4, lib. VI). Dunque  $(QE)^2 = ET \cdot EV$  (17, lib. VI). Sostituendo in questa equazione a  $QE$ ,  $2AB$ , e ad  $EV$ ,  $3AB$ , ne verrà  $\frac{4}{3} AB = ET$ ; e quindi  $AT = \frac{1}{3} AB$ . Nella stessa maniera si dimostrerà, che anche  $Bt$  è un terzo di  $AB$ , e quindi anche  $Tt$ .

69. *Prob.* Dividere una distanza  $AB$  in un qualunque numero di parti eguali.

*Sol.* Da un esempio, o due si rileverà meglio la regola generale (fig. 21).



*Es. I.* Sia la distanza  $AB$  da dividersi in cinque parti eguali. Ad essa si aggiungano in linea retta le quattro distanze eguali alla medesima  $AE, EF, FG, GH$  (§ 65), in maniera che resti quintuplicata in  $BH$ , ossia moltiplicata per tante unità, in quante parti si vuole dividere la medesima. Cogli estremi  $B$  ed  $H$  come centri, e col raggio  $AB$  della lunghezza della distanza, che si vuol dividere, si descrivano i due archi indefiniti  $AC, GI$ . Cogli stessi centri  $B$  ed  $H$ , e col raggio  $BH$  si descrivano i due archi  $HI, BC$ . Col centro  $C$ , e col primo raggio  $AB$  si descriva un arco indefinito  $BQ$ . Col raggio  $CI$ , centro  $H$ , si descriva un arco, che tagli l'arco  $BQ$  in  $Q$ . Sarà la distanza  $BQ$  sulla direzione della  $BA$ , e sarà la quinta parte di essa.

Se adesso alla  $BQ$  si aggiunge l'eguale  $Qq$  (§ 64), quindi le altre eguali  $qr, rs$ , si avranno determinate tutte le quinte parti della  $BA$ .

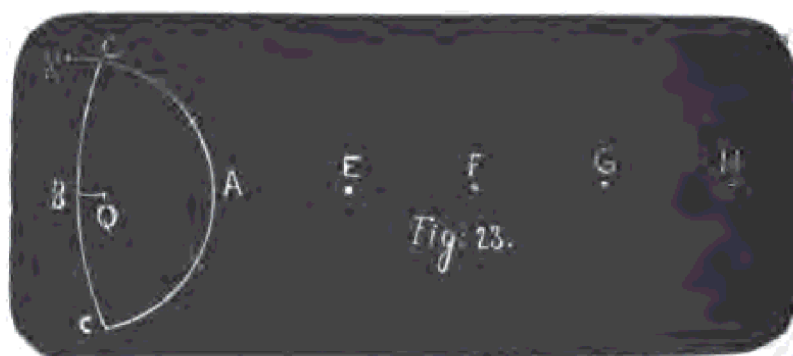
*Es. II.* Se si vuole dividere la  $AB$  in sette parti (fig. 22);



si formi la  $BH$  sette volte maggiore della  $BA$ . Cogli estremi di questa cioè coi punti  $B$  ed  $H$ , e col raggio  $AB$  si descrivano gli archi indefiniti  $AC$ ,  $GI$ . Cogli stessi centri  $B$  ed  $H$ , e col raggio  $BH$  si descrivano i due archi  $HI$ ,  $BC$ . Col centro  $C$ , e col primo raggio  $AB$  si descriva un arco indefinito  $BQ$ . Col raggio  $CI$ , centro  $H$ , si tagli quest' arco in  $Q$ ; sarà  $BQ$  sulla direzione della  $BA$ , e sarà la settima parte di essa.

*Dim.* Essendo il triangolo  $CQI$  di lati rispettivamente eguali al triangolo  $IHQ$ ; sarà l'angolo  $CIQ = IQH$  (8, lib. I), quindi  $CI$  parallela ad  $HQ$  (28, lib. I). Essendo poi la  $CI$  parallela anche alla  $BH$  (§ 23), sarà il punto  $Q$  sulla  $BH$ . Quindi avendo i due triangoli isosceli  $CBQ$ ,  $CBH$  un angolo alla base comune in  $B$ ; saranno simili (5 e 32, lib. I; 4, lib. VI), e sarà  $HB : BC :: BC :: BQ$ , ossia  $HB : AB :: AB : BQ$ . Quante volte dunque la  $HB$  sarà maggiore della  $AB$ , altrettante la  $AB$  sarà maggiore della  $BQ$ .

*Sol. II.* Si voglia dividere la  $AB$  per esempio in cinque



parti (fig. 23). Determinata, come nella Soluz. I, la  $BH$  cinque volte maggiore della  $AB$ ; col centro  $H$ , e col raggio  $HB$  si de-

scriva un arco indeterminato  $CBc$ . Ora col raggio  $BA$ , e col centro  $B$  si descriva la semicirconferenza  $cCK$  (§ 64). Collo stesso raggio  $AB$ , e col centro  $C$  si descriva l'arco  $BQ$ . Col raggio  $CK$ , e col centro  $B$  si tagli quest'arco in  $Q$ ; sarà  $BQ$  la quinta parte della  $BA$  posta sulla stessa direzione.

*Dim.* La retta  $BK$  sarà sulla continuazione della  $Bc$  (15, lib. IV). Fatte perciò le dovute sostituzioni nel § 22, si avrà  $KC \cdot BH = (BC)^2 = (AB)^2$ ; e quindi (17, lib. VI)  $BH : AB :: AB : KC$ . Ovvero  $BH : AB :: AB : BQ$ . Quanto dunque la  $BH$  sarà maggiore della  $AB$ , tanto la stessa  $AB$  sarà maggiore della  $BQ$ ; e se sarà  $BH = 5AB$ , sarà anche  $AB = 5BQ$ . Per l'egualianza poi dei lati tra loro nei due triangoli  $BKC$ ,  $BCQ$  si avrà l'angolo  $KCB = CBQ$  (8, lib. I). Ma all'angolo  $KCB$  è pur eguale l'angolo  $CBH$  (§ 22). Dunque la  $BQ$  è sulla direzione della  $BH$ .

70. Si vede chiaramente, che quest'ultimo Problema (§ 69) può molto servire nella pratica per dividere in linee un piede dato, e già diviso in pollici; poichè col metodo di esso essendo  $BH$  eguale a dodici pollici, riuscirà  $BQ$  eguale ad una dodicesima del primo pollice  $AB$ , cioè ad una linea. Nella stessa maniera il metro già diviso in decimetri si potrà suddividere in centimetri. Se sarà già descritta la retta  $AB$ , sulla quale si ha a trovare il punto  $Q$ ; l'operazione sarà più semplice, poichè senza descrivere col centro  $C$ , raggio  $AB$  l'arco  $BQ$ , basterà tagliare in  $Q$  la data retta  $AB$  colle aperture di compasso indicate qui sopra.

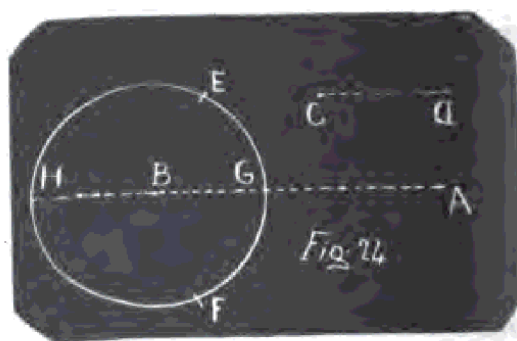
## LIBRO QUARTO

### DELL'ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DELLE DISTANZE; DELLA SITUAZIONE DELLE PERPENDICOLARI E DELLE PARALLELE

71. L'aggiungere, o togliere una distanza da un'altra data, che è così semplice e facile a farsi col compasso e colla riga, tirando una retta indefinita pei due estremi della prima distanza, e sopra essa aggiungendo, o togliendo la seconda distanza col compasso (3, lib. I) non è certo così pronta cosa, e spedita a farla col solo compasso; nè qui si propongono questi Problemi come di grande uso; ma solo perchè si vegga non poter esserci alcun Problema della Geometria Elementare, che non si possa anche sciogliere col compasso solo nel senso spiegato (§ I), il che si dimostrerà poi più rigorosamente a suo luogo, e perchè non manchi alcuno degli Elementi di questa nuova Geometria giusta la promessa (§ 7).

72. *Prob.* Dalla distanza  $AB$  togliere una distanza eguale a  $CD$  (fig. 24).

*Sol.* Col raggio  $CD$ , e col centro  $B$  (se la distanza si vuol togliere da quella parte) si descriva un cerchio  $FGEH$ . Col centro  $A$ , e con qualche raggio si descriva un arco, che tagli il cerchio in  $E$  ed  $F$ . Si divida in due l'arco  $EGF$  (§. 60) in  $G$ . sarà il punto  $G$  sulla retta  $BA$ , e sarà  $GA$  il residuo.



*Dim.* Avendo i due triangoli  $EBG$ ,  $FBG$  i lati eguali; sarà

l'angolo  $EBG = FBG$  (8, lib. I). Sarà dunque l'angolo  $EBG$  eguale alla metà dell'angolo  $EBF$ . Avendo pure i lati eguali tra loro i due triangoli  $EBA$ ,  $FBA$ ; si proverà nella stessa maniera, che anche l'angolo  $EBA$  è la metà dell'angolo  $EBF$ . Dunque l'angolo  $EBG$  è eguale ad  $EBA$ . Dunque il punto  $G$  è sulla  $BA$ . Ma è anche  $BG$  eguale alla  $CD$ . Dunque  $GA$  sarà il residuo della  $AB$  toltane la  $CD$ .

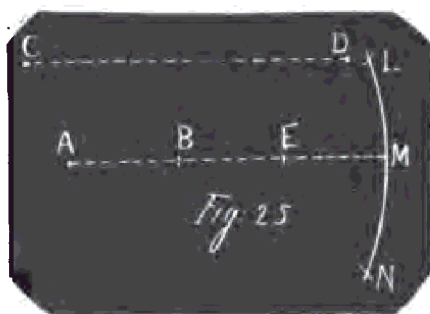
73. *Prob.* Alla distanza  $AB$  aggiungere la distanza  $CD$  in linea retta (fig. 24).

*Sol.* Col centro  $B$  (se l'aggiunta si vuol fare da quella parte), e col raggio  $CD$  si descriva il cerchio  $FGEH$ . Col centro  $A$ , e con qualche raggio si descriva un arco, che tagli il cerchio in  $E$  ed  $F$ . Si divida in due l'arco  $EHF$  in  $H$  (§ 60). Sarà il punto  $H$  sulla retta  $AB$ ; e sarà  $AH$  la somma delle due distanze  $AB$ ,  $CD$ .

*Dim.* Per l'eguaglianza de' lati tra loro ne' due triangoli  $EBH$ ,  $FBH$ , così pure ne' due triangoli  $EBA$ ,  $FBA$  si troverà (8, lib. I) l'angolo  $EBH = FBH$ , e l'angolo  $EBA = FBA$ . Dunque  $EBH + EBA = FBH + FBA$ . Ma la somma di tutti questi quattro angoli è eguale a quattro retti (13, lib. I). Dunque la loro metà, per esempio  $EBH + EBA$ , sarà eguale a due retti, e quindi la  $HBA$  sarà una retta (14, lib. I). È poi  $BH = CD$ . Dunque  $AH = AB + CD$ .

74. *Prob.* Sulla  $AB$  da  $A$  verso  $B$  collocare la  $CD$  maggiore della  $AB$  (fig. 25).

*Sol.* Col centro  $A$ , e col raggio  $CD$  si descriva un arco indefinito  $LMN$ , ovvero un cerchio intero. Col centro  $B$ , e con raggio arbitrario si descriva un arco, che tagli il primo ne' due punti  $L$  ed  $N$ . Si divida in due parti eguali l'arco  $LN$  (§ 60) in  $M$ . Sarà la  $AM$  la stessa  $CD$  posta a quel luogo, che che si voleva.



*Dim.* Col metodo delle dimostrazioni de' due Problemi precedenti (§§ 72 e 73) si troverà, che essendo l'angolo  $LMA = NMA$  (8, lib. I)  $= \frac{1}{2} LMN$ ; così pure  $LMB = NMB = \frac{1}{2} LMN$ ;



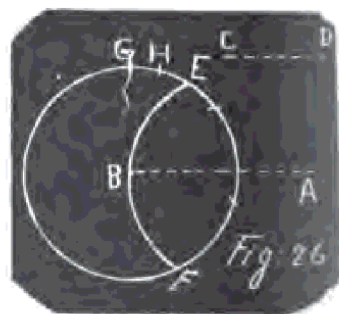
sarà  $LMA = LMB$ , e quindi  $ABM$  retta. È poi anche eguale a  $CD$ . Dunque ecc.

75. *Avv.* Se l'arco descritto col centro  $B$  tagliasse ad angoli troppo acuti l'arco descritto col centro  $A$ ; il che succede, quando  $AB$  è troppo piccola per rapporto a  $CD$ ; alla  $BA$  si aggiunga l'eguale  $AE$  in linea retta, e l'arco  $LMN$  descritto col centro  $A$  si tagli con un arco descritto col centro  $E$  in  $L$  ed  $N$ . Se anche in tal caso gli angoli de' due archi riuscissero troppo acuti; si triplichi, si quadruplichi, ecc. (§ 65) la retta  $AB$  da  $A$  verso  $B$ , fino a che l'ultimo suo punto preso per centro del secondo arco dia gli angoli d' intersezione in  $L$  ed  $N$  più vicini all'angolo retto. Si faccia lo stesso in casi simili pei §§ 72 e 73.

76. *Prob.* Dati i due punti  $A$  e  $B$ ; trovare un punto  $H$  tale, che la retta  $BH$  sia perpendicolare alla  $AB$  in  $B$  ed eguale ad una data  $CD$  (fig. 26).

*Sol.* Col centro  $B$ , e colla distanza  $CD$  per raggio si descriva un cerchio  $FEHG$ . Col centro  $A$ , e colla distanza  $AB$  per raggio si descriva un arco, che tagli il cerchio in  $F$  ed  $E$ . Si determini la semicirconferenza  $FEG$  (§ 64). Si divida in due egualmente l'arco  $GE$  in  $H$  (60). Sarà  $H$  il punto cercato.

*Dim.* Per la simiglianza de' due triangoli  $GEB$ ,  $EBA$  (§ 22) sarà l'angolo  $GEB = EBA$ , e quindi  $GE$  parallela a  $BA$  (28, lib. I). Ma  $BH$ , che divide in due egualmente l'angolo  $GBE$ , è perpendicolare alla corda  $GE$  (9, 11, 12 lib. I). Dunque anche alla  $BA$  (28, lib. I). Ma è in oltre  $BH = CD$ . Dunque  $H$  è il punto cercato.



Se la  $AB$  fosse troppo minore della  $CD$ ; si duplichi, o si triplichi ecc. (§ 64, 65).

77. *Prob.* Dati i due punti  $A$  e  $B$ ; trovare un punto  $D$  in guisa, che la  $DA$  sia perpendicolare alla  $AB$  (fig. 27).

*Sol.* Preso un raggio arbitrario (per esempio la stessa  $AB$ );

con esso, e coi due centri  $A$  e  $B$  si descrivano due archi, che si taglino in  $C$ . Con questo stesso raggio, e col centro  $C$  si descriva la semicirconfenza  $BAD$  (§ 64). Sarà  $D$  il punto cercato.

*Dim.* L'angolo  $DAB$  è nel semicerchio. Dunque è retto (31, lib. III).

78. *Prob.* Dati i due estremi d'una retta  $AB$  e un punto  $D$  fuori di essa, trovare un altro punto  $E$  (fig. 28), che determini la posizione della  $DE$  perpendicolare alla  $AB$ , e il punto  $M$ , dove la taglia.

*Sol.* Si faccia ad  $AD=AE$ , a  $BD=BE$  (§ 11). Sarà  $E$  il primo punto cercato. Si divida  $DE$  per metà in  $M$  (§ 66). Sarà  $M$  il secondo.

*Dim.* Resta dimostrata questa Soluzione dal § 14.

79. *Prob.* Trovare due punti di una retta, che sia perpendicolare al mezzo della  $DE$  (fig. 28).

*Sol.* Preso un raggio arbitrario, si faccia a questo  $=DA=EA$ . Preso lo stesso raggio, o un altro arbitrario, si faccia a questo dall'altra parte  $=DB=EB$ . Saranno  $A$  e  $B$  i due punti cercati.

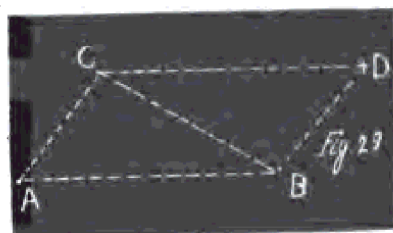
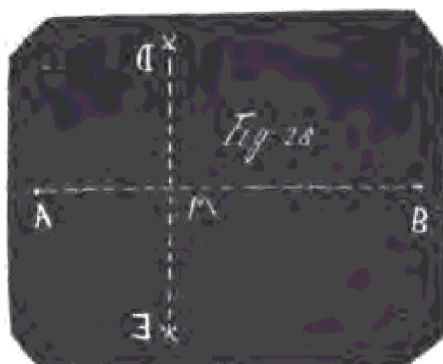
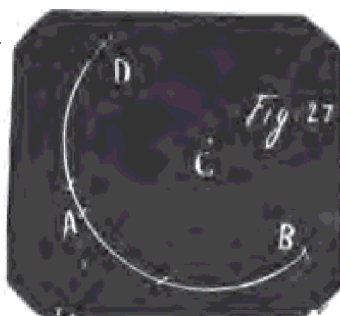
*Dim.* Resta dimostrata questa Soluzione dal § 14.

80. *Prob.* Dati due punti  $A$  e  $B$  d'una retta, e un punto  $C$  fuori di essa (fig. 29), pel quale si voglia condurre una parallela alla  $AB$ ; trovare un altro punto  $D$ , che ne determini la posizione.

*Sol.* Si faccia a  $CA=BD$  (§ 11);  $BA=CD$ . Sarà  $D$  il punto cercato.

*Dim.* Nei due triangoli  $CDB$ ,  $CAB$ , che hanno i tre lati eguali fra loro, l'angolo  $DCB$  è uguale all'angolo  $CBA$  (8, lib. I). Dunque  $CD$  è parallela ad  $AB$  (28, lib. I).

81. *Prob.* Dati due punti  $A$ , e  $B$  d'una retta, e un punto



$C$  fuori di essa; collocare a questo punto  $C$  una distanza  $CE$ ; (fig. 30); cosicchè la retta  $CE$  sia parallela alla  $AB$ , e sia eguale ad una data  $MN$ .

*Soluz.* Trovato un punto  $D$  della parallela, che passa per  $C$  col metodo del Problema precedente (§ 80), sulla direzione di questa  $CD$  si

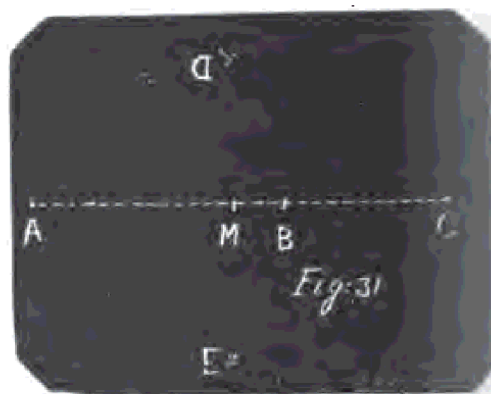
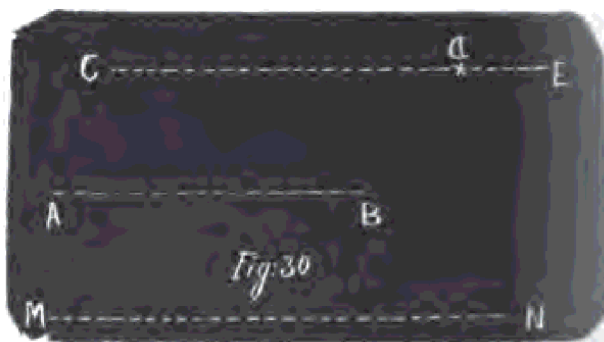
ponga la  $MN$  sottraendola ad essa, se è minore (§ 72), o aggiungendola dall'altra parte (§ 73), o collocandola sopra essa da  $C$  verso  $D$ , se è maggiore (§ 74), secondochè richiederanno le condizioni del Problema.

Questa Soluzione non ha bisogno di dimostrazione.

82. *Prob.* Esaminare se i tre punti  $A, B, C$  sono in linea retta (fig. 31).

*Sol.* Coi centri  $A$  e  $C$ , e con un raggio arbitrario, per esempio  $AC$ , si segnino due archi, che si taglino in  $D$  ed  $E$ . Si osservi, se sia  $DB = ED$ . Se ciò è; i tre punti  $A, B, C$  sono in linea retta. Altrimenti no.

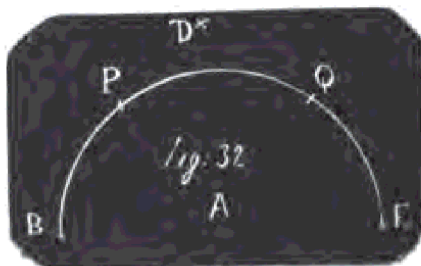
*Dim.* Se è anche  $DB = EB$ , sarà l'angolo  $DAB = EAB = \frac{1}{2} DAE$  (8, lib. I), a cagione dei lati eguali tra loro ne' due triangoli  $DAB, EAB$ . Ma nei triangoli  $DAC, EAC$  per la stessa cagione sono eguali gli angoli  $DAC, EAC$ , e però eguali ciascuno alla metà dell'angolo  $DAE$ . Dunque sarà  $DAB = DAC$ ; e quindi i tre punti  $A, B, C$  in linea retta. Se poi  $DB$  sia maggiore o minore di  $EB$ ; anche l'angolo  $DAB$  sarà maggiore o minore dell'angolo  $EAB$  (25, lib. I), e quindi non potrà essere eguale all'angolo  $DAC$ , non potendo essere eguale



alla metà dell'angolo  $DAE$ . Dunque i tre punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  non potranno essere in linea retta.

83. *Prob.* Dati i tre punti  $A$ ,  $B$ ,  $D$  esaminare se la  $DA$  sia perpendicolare ad  $AB$  (fig. 32).

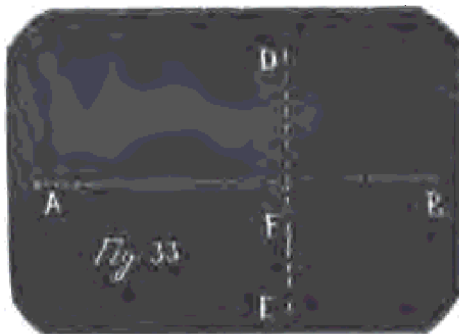
*Sol.* Si duplichi la  $AB$  in  $E$  (§64) per via del semicircolo  $BPQE$ . Si osservi se sia  $DB = DE$ . Se lo è, l'angolo  $DAB$  è retto. Altrimenti non lo è.



*Dim.* Essendo retta la  $BAE$  diametro del cerchio; la  $DA$  farà con essa due angoli, la somma de' quali sarà eguale a due retti (13, lib. I). Ne' due triangoli poi  $DAE$ ,  $DAB$ , che hanno i lati  $AE$ ,  $AB$  eguali fra loro, e il lato  $AD$  comune, se il lato  $DE$  sarà eguale al lato  $DB$ ; anche l'angolo  $DAE$  sarà eguale all'angolo  $DAB$  (8, lib. I), e però entrambi retti. Se poi  $DE$  sarà maggiore, o minore di  $DB$ ; anche l'angolo  $DAE$  sarà maggiore o minore dell'angolo  $DAB$ ; quindi uno sarà acuto, e l'altro ottuso (25, lib. I).

84. *Prob.* Esaminare se la retta, che passa per due punti dati  $D$ ,  $F$  (fig. 33), sia perpendicolare alla retta, che passa per altri due punti dati  $A$ ,  $B$ .

*Sol.* Per via del punto  $D$  si trovi la perpendicolare  $DE$  alla  $AB$  (§ 78). Si esamini, se i tre punti  $D$ ,  $E$ ,  $F$  sono in linea retta (§ 82). Se sì; la  $DF$  è perpendicolare alla  $AB$ ; altrimenti no.



*Dim.* Poichè la  $DE$  è perpendicolare per costruzione; se lo è anche la  $DF$ , sarà la stessa retta; poichè da un punto  $D$  ad una retta  $AB$  non si possono condurre due perpendicolari (Coroll. Prop. 32, lib. I).

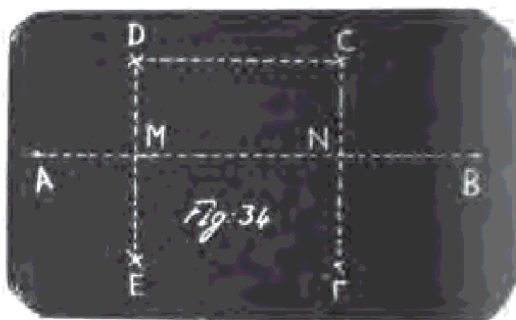
85. *Prob.* Dati due punti  $A$ ,  $B$  d'una retta (fig. 34) e due  $C$ ,  $D$  d'un'altra; esaminare se sieno parallele.

*Sol.* Si faccia ad  $AD = AE$ ; a  $BD = BE$  (§ 11). Si faccia pure ad  $AC = AF$ , a  $BC = BF$ . Si osservi, se sia  $DE = CF$ ;

se ciò è; saranno parallele; se no; convergeranno dalla parte della minore.

*Dim.* Le  $DE$ ,  $CF$  sono perpendicolari alla  $AB$ , e sono tagliate per metà da essa in due punti  $M$  ed  $N$  (§ 14).

Dunque sono duple rispettivamente delle distanze  $DM$ ,  $CN$  dei punti  $D$  e  $C$  dalla retta  $AB$ . Se dunque saranno eguali, le distanze saranno eguali, e quindi le  $AB$ ,  $DC$  parallele; altrimenti convergeranno.



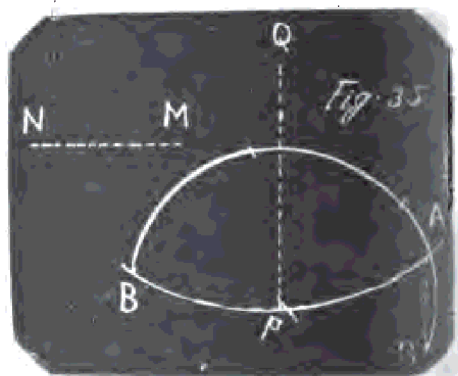
## LIBRO QUINTO

### DELLE DISTANZE PROPORZIONALI

86. *Prob.* Trovare una terza proporzionale alle due distanze  $Qp$ ,  $MN$  (fig. 35), delle quali la prima  $Qp$  è maggiore della seconda  $MN$ .

*Sol.* Col centro  $Q$ , e col raggio  $Qp$  si descriva un arco indefinito  $ApB$ . Col centro  $p$ , e col raggio  $MN$  si descriva la semicirconferenza  $BAS$ . Sarà  $AS$  la terza proporzionale.

*Dim.* Pel Lemma del § 22 sarà  $AS \cdot pQ = (Ap)^2$ . Dunque  $AS \cdot pQ = (MN)^2$ . Quindi (17, lib. VI)  $pQ : MN :: MN : AS$ .



87. Trovare una terza proporzionale alle due distanze  $Qp$ ,  $MN$  (fig. 36), delle quali la prima è minore della seconda, ma però maggiore della metà di quella.

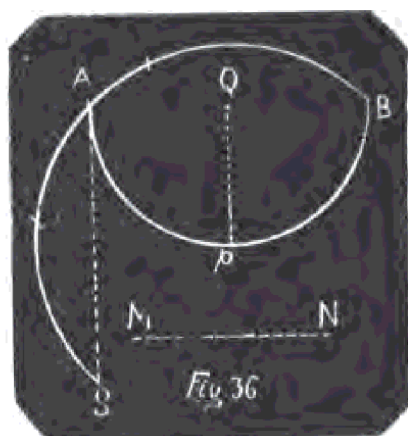
*Avv.* Ci accorgeremo, che la  $Qp$  sia maggiore della metà della  $MN$ , se i due cerchi descritti coi centri  $Q$  e  $p$ , che sono gli estremi della prima distanza, e coi raggi  $Qp$  ed  $MN$ , che sono le due distanze date, si taglino tra loro come nella figura.



*Sol.* È la stessa, che la precedente applicata alla fig. 36.

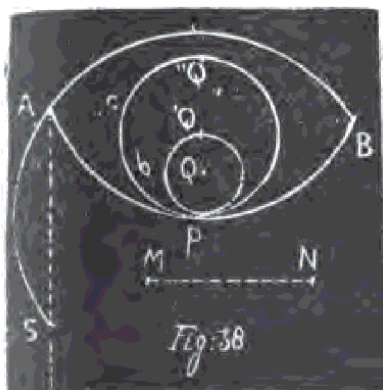
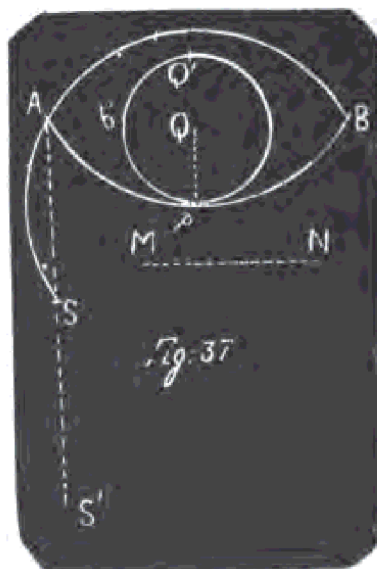
*Dim.* È la stessa, che la precedente.

88. Se il circolo  $pbQ'$  descritto col centro  $Q$ , e col raggio  $Qp$  non si tagliasse in alcun punto col circolo descritto col centro  $p$ , e col raggio  $MN$ , come nella fig. 37; servirà il problema seguente.



89. *Prob.* Trovare una terza proporzionale alle due distanze (fig. 37)  $Qp$ ,  $MN$ , delle quali la prima è minore della metà della seconda.

*Sol.* Col centro  $p$ , raggio  $MN$  si descriva un arco indefinito  $BAS$ . Col



centro  $Q$ , raggio  $Qp$  si descriva la semicirconfenza  $pbQ'$  (§ 64). Col centro  $Q'$ , raggio  $Q'p$  si descriva un arco indefinito. Se

quest'arco taglia l'arco  $BAS$  in due punti  $B$  ed  $A$ ; si determini la semicirconfenza  $BAS'$  (§ 64). Col metodo dello stesso § 64 alla  $AS'$  si aggiunga in linea retta un'eguale  $S'S$ . Sarà  $AS$  la terza proporzionale cercata.

*Dim.* Si ha (§ 22)  $AS' \cdot pQ' = (Ap)^2 = (MN)^2$ . Ma  $pQ' = 2pQ$ . Dunque  $2AS' \cdot pQ = (MN)^2$ ; ossia  $AS \cdot pQ = (MN)^2$ . Quindi (17, lib. I)  $pQ : MN :: MN : AS$ .

90. Se nemmeno l'arco  $pcQ''$  descritto col centro  $Q'$  (fig. 38), e col raggio  $Q'p$  tagliasse l'arco  $BAS$  descritto col centro  $p$ , e col raggio  $MN$ ; si determini la semicirconfenza  $pcQ''$ ; col centro  $Q''$ , e col rag-



gio  $Q''p$  si descriva un arco indefinito. Se questo taglia l'arco  $BAS$  in due punti  $A$  e  $B$ ; si determini la semicirconferenza  $BA S'$  (§ 64). Si quadruplichi  $AS'$  (§ 65), e sia  $AS=4AS'$ . Sarà questa la terza proporzionale cercata.

*Dim.* Poichè si ha (§ 22)  $AS' \cdot pQ'' = (Ap)^2 = (MN)^2$ . Quindi  $4AS' \cdot pQ = (MN)^2 = AS \cdot pQ$ . Quindi (17, lib. VI)  $pQ : MN :: MN : AS$ .

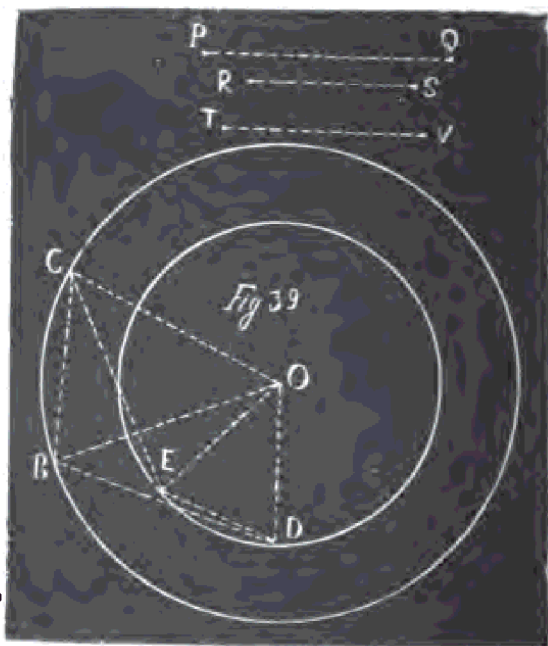
91. Nella stessa guisa si procederebbe oltre, se nemmeno la distanza  $Q''p$  fosse maggiore della metà della  $MN$ ; cioè si prenderebbe una distanza dupla di essa, e ottupla di  $Qp$ , e si ottuplicherebbe la  $AS'$ , che ne venisse determinata. Questa distanza ottupla della  $AS'$  sarebbe la terza proporzionale cercata; e così via via.

La dimostrazione è come le precedenti.

92. Anche nel caso che la prima distanza  $Qp$  fosse bensì maggiore della metà della seconda  $MN$ , ma di poco, gioverà duplicarla, perchè le intersezioni de' due cerchj si facciano ad angoli non tanto acuti, ma più vicini al retto (§ 9).

93. Trovare la quarta proporzionale alle tre distanze  $PQ, RS, TV$  (fig. 39).

*Sol.* Con un medesimo centro  $O$ , e colle due prime distanze prese per raggi si descrivano due cerchj, cioè col raggio  $PQ$  il cerchio  $BC$ , e col raggio  $RS$  il cerchio  $DE$ . Colla terza distanza  $TV$  presa per raggio, e fatto centro in qualche punto  $B$  della prima circonferenza, si segni un arco, che la tagli in  $C$ . Con un raggio arbitrario fatto centro in  $B$  si segni un arco, che tagli la seconda circonferenza in  $D$ . Collo stesso raggio  $BD$  fatto centro in  $C$  si tagli la stessa circonferenza in un prossimo punto  $E$ . Sarà  $DE$  la quarta proporzionale.



*Dim.* A cagione dei lati eguali tra loro nei due triangoli  $COE$ ,  $BOD$  si avrà l'angolo  $COE = BOD$  (8, lib. I). E tolto da entrambi (o aggiunto) l'angolo  $BOE$ , si avrà l'angolo  $COB = EOD$ . Sarà dunque anche la somma degli angoli  $OCB$ ,  $OBC$  eguale alla somma degli angoli  $OED$ ,  $ODE$  (32, lib. I). Ma i due triangoli  $COB$ ,  $EOD$  sono isosceli. Saranno dunque le due semisomme, ossia gli angoli alla base, eguali (5, lib. I). Quindi i triangoli saranno simili (4, lib. VI), e si avrà  $CO : DO :: CB : DE$ ; ossia  $PQ : RS :: TV : DE$ .

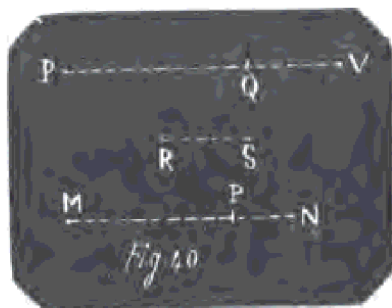
94. *Avv. I.* Gioverà prendere il raggio arbitrario  $BD$  in guisa che l'angolo  $BDO$  riesca vicino al retto (§ 9), il che si può fare ad occhio.

95. *Avv. II.* Se la terza distanza  $TV$  non si potesse collocare come corda in  $BC$ , il che avverrà, quando la  $TV$  sarà maggiore di due volte la  $PQ$ ; converrà duplicare le due distanze  $PQ$ ,  $RS$  (§ 64), e con esse così duplicate descrivere i due cerchj  $BC$ ,  $DE$ , e fare tutto il resto come sopra (§ 93). Se ciò nemmeno bastasse, converrebbe triplicarle ecc. Gioverà pure duplicarle, o triplicarle ecc., quando la  $TV$  si potesse bensì applicare per corda al primo cerchio, ma essa fosse quasi eguale al diametro di quello; e ciò per ischivare le sezioni ad angoli acuti, e ottenerne delle altre più vicine all'angolo retto.

Ciò resta dimostrato dall'essere  $PQ : RS :: 2PQ : 2RS :: 3PQ : 3RS$  ecc. Quindi avendosi fatto come  $2PQ$  a  $2RS$ , ovvero come  $3PQ$  a  $3RS$  ecc., così  $BC$  a  $DE$ , sarà sempre come  $PQ$  ad  $RS$ ; così  $BC$  a  $DE$ ; cioè come  $PQ$  ad  $RS$ , così  $TV$  a  $DE$  (4, lib. V).

96. *Prob.* Dividere la  $MN$  in  $P$  in parti proporzionali alle due distanze date  $PQ$ ,  $RS$  (fig. 40).

*Sol.* Alla  $PQ$  si aggiunga in linea retta la  $QV$  eguale alla  $RS$  (§ 73). Alle tre  $PV$ ,  $MN$ ,  $PQ$  si trovi la quarta proporzionale (§ 93), la quale si collochi sulla  $MN$  in  $MP$ , il che si fa sottraendola dalla  $MN$  (§ 72). Sarà fatto.



*Dim.* Essendo  $PV : MN :: PQ : MP$ , sarà ancora  $PV : MN :: QV : PN$  (5, lib. V). Sarà dunque  $PQ :$

$MP :: QV : PN$ . Quindi (16, lib. V)  $PQ : QV :: MP : PN$ ; ossia  $PQ : RS :: MP : PN$ .

97. *Prob.* Dividere la  $AB$  (fig. 41) in estrema e media ragione.

*Sol.* Col centro  $A$ , raggio  $AB$  si descriva il cerchio  $Bdd$ . Si faccia nella sua circonferenza ad  $AB = BC = CD = DE = Ed$ . Si faccia a  $BD = Ba' = Ea$ . Si faccia ad  $Aa' = Db = db$ . Sarà la  $AB$  divisa in  $b$  in estrema, e media ragione, e si avrà  $BA : Ab :: Ab : bB$ .

*Dim.* Vedi il § 46.

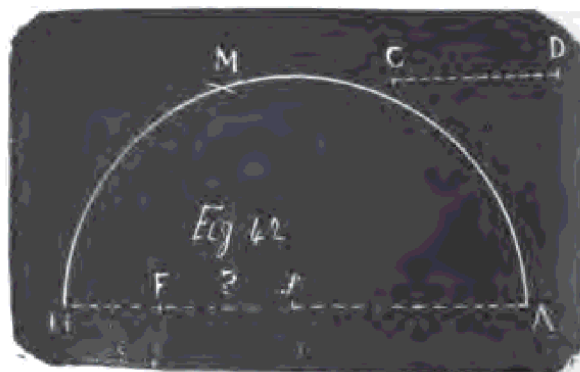
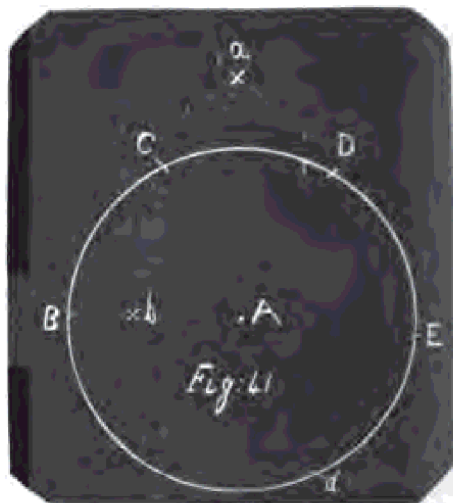
98. Anche quest' ultimo problema (§ 97) è uno di quelli, i quali si sciolgono molto più semplicemente col solo compasso, che col compasso e colla riga insieme, come si può vedere confrontando questa soluzione colle soluzioni geometriche conosciute. La dimostrazione tuttavia riesce più complicata.

99. *Prob.* Tra le due distanze date  $AB$  e  $CD$  (fig. 42) trovare la media proporzionale.

*Sol.* Sulla  $AB$  si aggiunga ad essa la  $CD$  da  $B$  in  $H$  (§ 73). Si divida per metà la  $AH$  in  $f$  (§ 66). Alla  $BF$  si aggiunga in linea retta l'eguale  $Bf$  (§ 64). Coi centri  $F$ ,  $f$ , e col raggio  $fA$  si descrivano

due cerchj, che si taglino in  $M$ . Sarà  $BM$  la media proporzionale.

*Dim.* Essendo i punti  $f$ ,  $B$ ,  $F$  sulla stessa retta  $HA$ , ed essendo eguali rispettivamente i lati dei due triangoli  $MBf$ ,  $MBF$ , sarà l'angolo  $MBf = MBF$  (8, lib. I), e però entrambi retti (13, lib. I). Sarà dunque la  $MB$  perpendicolare al diametro  $HA$  del semicerchio  $HMA$ . Quindi (13, lib. VI)  $AB : BM :: BM : BH$ , ossia  $AB : BM :: BM : CD$ .



## LIBRO SESTO

## DELLE RADICI

100. *Prob.* Trovare facilmente le radici dei numeri interi dall'uno fino al dieci (fig. 43), prendendo per unità la distanza  $AB$ .

*Sol.* Col raggio  $AB$  si descriva il cerchio  $Bd$ ; si faccia nella sua circonferenza ad  $AB=BC=CD=DE=Ed=dc$ . Coi centri  $B$  ed  $E$ , e col raggio  $BD$  si segnino degli archi, che si taglino in  $\alpha$ , ed  $\alpha$ . Collo stesso raggio  $BD$ , e coi centri  $D$  e  $d$  si segnino due archi, che si taglino in  $V$ . Col raggio  $A\alpha$ , e col centro  $B$  si tagli la circonferenza in  $F$ . Coi centri  $B$  ed  $F$ , e col raggio  $AB$  si segnino due archi, che si taglino in  $T$ . Si avrà



$AB = \sqrt{1}$	$\alpha V = \sqrt{6}$
$A\alpha = \sqrt{2}$	$CV = \sqrt{7}$
$BD = \sqrt{3}$	$\alpha \alpha = \sqrt{8}$
$BE = \sqrt{4}$	$BV = \sqrt{9}$
$ET = \sqrt{5}$	$TV = \sqrt{10}$

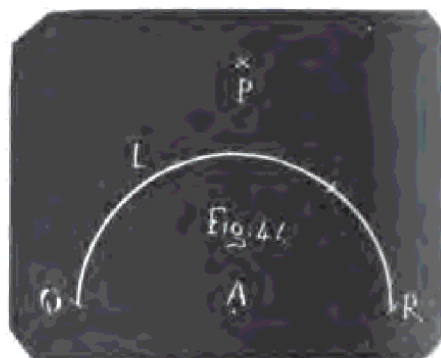
*Dim.* Si è dimostrato essere  $(A\alpha)^2=2$  (§ 27). Dunque  $A\alpha = \sqrt{2}$ . Si è dimostrato essere  $BD=\sqrt{3}$  (§ 2). Si ha poi  $BE=2 = \sqrt{4}$ .

Avendo poi i due triangoli  $BTA$ ,  $TAF$  i lati eguali tra loro; sarà l'angolo  $BTA=TAF$  (8, lib. I). Quindi  $BT$  parallela ad  $FA$  (28, lib. I), e però anche la  $BT$  si troverà perpendicolare a  $BA$ , come la  $FA$  (§ 27) (27, lib. I). Avendo poi il punto  $A$  e il punto  $E$  la stessa distanza dai punti  $D$  e  $d$ , così pure il punto  $B$  e il punto  $V$ ; saranno i quattro punti  $B, A, E, V$  sulla stessa retta (§ 13), e sarà  $EV=BA$  (§ 14). Sarà dunque  $(ET)^2=(TB)^2+(BE)^2$  (47, lib. I)  $=(AB)^2+4(AB)^2=5$ ; quindi  $ET=\sqrt{5}$ . Istessamente  $(\alpha V)^2=(A\alpha)^2+(AV)^2$ . Ma essendo  $EV=BA$ ; è ancora  $AV=BE=2AB$ ; quindi  $(AV)^2=4(AB)^2=4$ ; ed è  $(A\alpha)^2=2$  (§ 27).

Dunque  $(aV)^2=6$ ; ed  $aV=\sqrt{6}$ . Confrontando poi i punti  $C, B, c, A, V$  coi punti  $A, p, B, P, Q$  della fig. 3, e fatte le sostituzioni nell'equazione  $(AQ)^2=(Ap)^2+pQ \cdot PQ$  (§ 18), si otterrà  $(CV)^2=(CB)^2+BV \cdot AV=1+3 \cdot 2=7$ . Quindi  $CV=\sqrt{7}$ . Essendo pure  $Aa=A\alpha$  (§ 14); sarà  $(\alpha\alpha)^2=4(Aa)^2=8$ . Quindi  $\alpha\alpha=\sqrt{8}$ . Si ha poi  $BV=3=\sqrt{9}$ . Finalmente essendo  $(TV)^2=(TB)^2+(BV)^2=1+9=10$ ; si ha  $TV=\sqrt{10}$ .

101. *Prob.* Per via delle radici trovate nel problema precedente (fig. 44), trovare le altre radici de' numeri interi dal 10 fino al 36.

*Sol.* Si sottragga il numero, del quale si vuole la radice, dal numero quadrato prossimamente maggiore, che sarà il 16, o il 25, o il 36. Colla radice del residuo, la quale si troverà nella lista del § 100, presa per raggio, e con un



centro  $A$  si descriva la semicirconferenza  $QLR$  (§ 64). Colla radice del numero quadrato prossimamente maggiore presa per raggio, la quale si troverà col metodo del § 65, e coi centri  $Q$  ed  $R$  si descrivano due archi, che si taglino in  $P$ . Sarà  $AP$  la radice cercata.

Per esempio si voglia la radice del 29. Sottratto questo dal 36, lascia di residuo 7. Col raggio  $CV=\sqrt{7}$  (§ 100) descritta la semicirconferenza  $QLR$ , e coi centri  $Q$  ed  $R$ , e col raggio  $=6$  segnati due archi, che si taglino in  $P$ ; sarà  $AP=\sqrt{29}$ .

*Dim.* Essendo retto l'angolo  $PAQ$  (§ 83); sarà  $(PQ)^2=(AQ)^2+(AP)^2$  (47, lib. I). Quindi togliendo  $(AQ)^2$ , si avrà  $(PQ)^2-(AQ)^2=(AP)^2$ . Ora posto  $(PQ)^2=36$  e  $(AQ)^2$  eguale successivamente ai numeri interi dall'unità fino al 10, si avrà  $(AP)^2$  eguale successivamente dal 36 in giù fino al 25. Dunque per  $AP$  si avranno successivamente le radici di questi numeri. La radice poi di 25 è 5, e si ha dal § 65. Posto  $(PQ)^2=25$ , si avranno collo stesso metodo le radici dal 25 in giù fino al 16, e posto  $(PQ)^2=16$ , si avranno le altre dal 16 in giù fino al 10.

Nell'esempio addotto si avrà  $(PQ)^2-(AQ)^2=36-7=(AP)^2=29$ . Quindi  $AP=\sqrt{29}$ .



102. *Prob.* Trovare le radici di tutti i numeri interi.

*Sol.* È chiaro, che adoperando lo stesso metodo del § 101 colle radici acquistate, con esso si potranno avere altre radici di numeri superiori, e con queste altre, e così successivamente sino in infinito. Abbiamo già dunque il modo di ottenere le radici di tutti i numeri interi.

103. *Prob.* Trovare la radice di qualunque numero rotto.

*Sol.* Si trovi la radice del denominatore (§ 102), poi quella del numeratore. Si faccia come la prima radice alla seconda, così l'unità ad una quarta proporzionale (§ 93). Sarà questa la radice cercata.

*Dim.* Poichè se il denominatore sia  $d$ ; il numeratore sia  $n$ ; se si farà  $\sqrt{d} : \sqrt{n} :: 1 :$  quarta proporzionale; sarà questa quarta  $= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}}$ . Ma  $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{n}{d}}$ . Dunque ecc.

104. *Prob.* Trovare (fig. 45) facilmente la metà delle radici dei numeri interi dall'uno fino al venticinque.

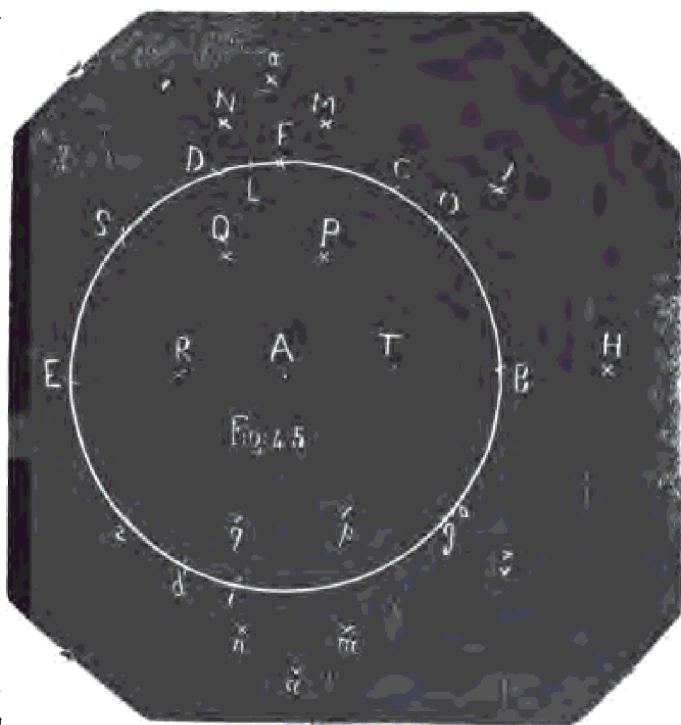
*Sol.* Preso il raggio  $AB$  eguale ad uno, col centro  $A$  si descriva il cerchio  $BDD$ , e nella sua circonferenza si faccia ad  $AB=BC=CD==DE=Ed$ .

Col centro  $B$ , e col raggio  $BD$  si descriva un arco, che passi pei punti  $a, N, D, d, n, \alpha$ .

Collo stesso raggio, e col centro  $E$

si descriva un arco, che passi pei punti  $a, M, C, m, \alpha$ .

Col raggio  $Aa$ , e col centro  $B$  si descriva un arco, che passi pei punti  $M, F, Q, q, m$ .





Collo stesso raggio, e col centro  $E$  si descriva un arco, che passi pei punti  $N, F, P, p, n$ .

Col raggio  $AB$ , e col centro  $B$  si descriva un arco, che passi per  $P$  e  $p$ .

Collo stesso raggio, e col centro  $E$  si descriva un arco, che passi per  $Q$  e  $q$ .

Collo stesso raggio, e col centro  $P$  si descriva un arco, che passi per  $R$ , e tagli la circonferenza in  $S$ ; col centro  $p$  si segni un altro arco, che tagli il primo in  $R$ , e la circonferenza in  $s$ .

Collo stesso raggio, e coi centri  $Q, q$  si descrivan due archi, che si taglino in  $T$ , e taglino la circonferenza in  $O$  ed  $o$ .

Collo stesso raggio, e col centro  $\alpha$  si tagli con un arco la circonferenza in  $g$ . Col centro  $R$  si tagli con un arco la circonferenza in  $L$  ed  $l$ . Coi centri  $O$  ed  $o$  si segnino due archi, che si taglino in  $H$ . Coi centri  $H$  e  $T$  si segnino due archi, che si taglino in  $V$  e  $v$ . Sarà

$RA = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$HF = \frac{1}{2}\sqrt{13}$
$RQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$EO = \frac{1}{2}\sqrt{14}$
$RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$Ll = \frac{1}{2}\sqrt{15}$
$RP = \frac{1}{2}\sqrt{4}$	$BE = \frac{1}{2}\sqrt{16}$
$RF = \frac{1}{2}\sqrt{5}$	$Ha = \frac{1}{2}\sqrt{17}$
$AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}$	$HN = \frac{1}{2}\sqrt{18}$
$Qq = \frac{1}{2}\sqrt{7}$	$HD = \frac{1}{2}\sqrt{19}$
$Aa = \frac{1}{2}\sqrt{8}$	$ag = \frac{1}{2}\sqrt{20}$
$BR = \frac{1}{2}\sqrt{9}$	$dV = \frac{1}{2}\sqrt{21}$
$BL = \frac{1}{2}\sqrt{10}$	$HS = \frac{1}{2}\sqrt{22}$
$pS = \frac{1}{2}\sqrt{11}$	$Mm = \frac{1}{2}\sqrt{23}$
$BD = \frac{1}{2}\sqrt{12}$	$Mn = \frac{1}{2}\sqrt{24}$

$$HE = \frac{1}{2}\sqrt{25}.$$

*Dim.* Se si confrontino i punti  $P, B, p, R, E$  di questa figura coi punti  $A, p, B, P, Q$  della fig. 3 per mezzo dell'equazione del § 18  $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ$ , si otterrà l'equazione per questa figura  $(PE)^2 = (PB)^2 + BE \cdot RE$ ; ossia  $(Aa)^2 = (AB)^2 + 2AB \cdot RE$ ; ossia (§ 27)  $2 = 1 + 2RE$ . Quindi  $RE = \frac{1}{2}AE$ , e poichè  $R$  è sulla stessa retta  $BAE$  (§ 13), sarà anche  $RA = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$ .

Essendo il punto  $T$  alla metà della  $AB$  per la stessa ra-

gione, colla quale si è dimostrato, che il punto  $R$  è alla metà della  $AE$ ; sarà  $AT=RE$ , quindi confrontandosi i punti di questa fig. 45,  $Q, T, q, E, R$  coi punti  $A, q, B, Q, P$  della fig. 3, il punto  $A$  della fig. 45 sarà il punto  $p$  della fig. 3. Dunque dall'equazione del § 16,  $(AQ)^2=(AP)^2+(PQ)^2+Pp \cdot PQ$  si ricaverà per questa fig. 45 l'equazione  $(QE)^2=(RQ)^2+(RE)^2+AR \cdot RE$ ; ossia sostituendo i valori numerici  $1=(RQ)^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ . Quindi

$$(RQ)^2 = \frac{1}{4} \cdot 2; \quad RQ = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Confrontando i punti  $D, A, d, E$  di questa figura 45, coi punti  $P, A, p, B$  della fig. 3, resterà dimostrato dal § 14, che le due  $AE, Dd$  si taglino vicendevolmente in due parti eguali. Ma la  $AE$  è tagliata in due parti eguali in  $R$ ; dunque anche la  $Dd$ . Ma  $Dd=BD=\sqrt{3}$  (§ 2). Dunque  $RD = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ .

Si ritenga, che la  $DRd$  è anche perpendicolare alla  $AE$  (§ 14).

Si ha poi  $RP=1$ . Dunque  $RP = \frac{1}{2} \sqrt{4}$ .

Essendo retto l'angolo  $FAR$  (§ 27); si ha  $(RF)^2=(FA)^2+(AR)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ . Dunque  $RF = \frac{1}{2} \sqrt{5}$ .

Essendo la base  $BAE$  del triangolo  $BME$  tagliata per metà della retta  $AM$ ; si avrà pel § 26,  $(BM)^2+(EM)^2=2(AB)^2+2(AM)^2$ ; cioè  $(Aa)^2+(BD)^2=2(AB)^2+2(AM)^2$ ; cioè  $2+3=2+2(AM)^2$ . Quindi  $6=4(AM)^2$ ;  $\sqrt{6}=2AM$ ;  $AM = \frac{1}{2} \sqrt{6}$ .

Essendosi confrontati qui sopra i punti  $Q, T, q, E, R, A$  di questa Fig. 45 coi punti  $A, q, B, Q, P, p$  della Fig. 3, risulterà dal § 13 essere in questa Fig. 45  $AQ=Aq=QR=Rq$ . Per le stesse ragioni risulterà essere eguali tra loro, ed a queste quattro le quattro  $AP, Ap, PT, Tp$ . Avendo dunque i due triangoli isosceli  $PTA, QAR$  tutti i lati eguali tra loro; sarà l'angolo  $PAT=QRA$  (8, lib. I), ed essendo  $TAR$  retta, sarà  $PA$  parallela a  $QR$  (29, lib. I). Quindi anche  $PQ$  eguale e parallela alla  $AR$  (33, lib. I).

Ma  $Qq$  è perpendicolare alla  $AR$  (§ 14). Dunque anche alla  $PQ$  (27, lib. I). Si hanno poi nei due triangoli  $PAT, RAq$  i due angoli  $PAT, RAq$  eguali (8, lib. I), e  $TAR$  retta. Dunque essendo eguali a due retti i due angoli  $PAT, PAR$  (13, lib. I),

lo saranno anche i due  $PAR$ ,  $RAq$ . Quindi sarà retta anche la  $PAq$ , (14, lib. I). Dunque  $(Pq)^2 = (2RQ)^2 = (PQ)^2 + (Qq)^2$  (47, lib. I); cioè  $2 = \frac{1}{4} + (Qq)^2$ ; quindi  $\frac{7}{4} = (Qq)^2$ , e  $Qq = \frac{1}{2}\sqrt{7}$ .

Si ha poi  $(Aa)^2 = 2$  (§ 27)  $= \frac{8}{4}$ . Quindi  $Aa = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{8}$ .

Sia pure  $BR = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{9}$ .

Se si confrontino i punti  $B$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $l$ ,  $A$  di questa Fig. 45 coi punti  $Q$ ,  $A$ ,  $p$ ,  $B$ ,  $P$  della Fig. 3; dall'equazione  $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ$  del § 16 si ricaverà l'equazione per questa Figura 45  $(BL)^2 = (LA)^2 + (AB)^2 + AR \cdot AB$ ; ossia  $(BL)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{10}{4}$ . Quindi  $BL = \frac{1}{2}\sqrt{10}$ .

I due triangoli  $PSA$ ,  $PBA$  hanno i lati rispettivamente eguali. Dunque si ha l'angolo  $SPA = PAB$  (8, lib. I). Quindi sono parallele le  $PS$ ,  $BA$  (28, lib. I). Ma la  $Pp$  taglia ad angoli retti la  $BR$  (§ 14). Dunque sarà perpendicolare anche alla  $PS$  (27, lib. I). Nella stessa maniera poi, che si è dimostrato essere  $(Qq)^2 = \frac{7}{4}$ , si dimostrerà pure essere  $(Pp)^2 = \frac{7}{4}$ . Quindi avendosi  $(pS)^2 = (Pp)^2 + (PS)^2$  (47, lib. I); si avrà  $(pS)^2 = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4}$ ; quindi  $pS = \frac{1}{2}\sqrt{11}$ .

Si ha poi  $(BD)^2 = 3$  (§ 2)  $= \frac{12}{4}$ . Quindi  $BD = \frac{1}{2}\sqrt{12}$ .

Si ha pure  $(HF)^2 = (HA)^2 + (AF)^2$ ; e dimostrandosi la  $QO$  parallela alla  $BE$  nella stessa guisa, che si è dimostrato della  $PS$ ; saranno i punti  $O$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  nella stessa retta, e  $PO = QO - PQ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = PQ$ . Essendo dunque  $OP$  eguale e parallela tanto alla  $TA$ , quanto alla  $TB$ ; saranno eguali e parallele anche le  $OT$ ,  $PA$ ; e le due  $OB$ ,  $PT$  fra loro (33, lib. I). Ma si è dimostrato qui sopra essere  $PT = PA$ . Dunque sarà anche a queste  $= OT = OB$ . Per la stessa ragione dall'altra parte le  $oT$ ,  $oB$  saranno eguali alla  $pA = PA$ . Se ora si confrontino i punti  $O$ ,  $o$ ,  $A$ ,  $T$ ,  $B$ ,  $H$  coi punti  $A$ ,  $B$ ,  $Q$ ,  $P$ ,  $p$ ,  $q$  della Fig. 3, si ricaverà dal § 14 essere  $HB = AT = \frac{1}{2}$ . Sarà dunque  $(HA)^2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ ; quindi  $(HF)^2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$  e  $HF = \frac{1}{2}\sqrt{13}$ .

Se si confrontino i punti  $E$ ,  $O$ ,  $H$ ,  $o$ ,  $A$  coi punti  $Q$ ,  $A$ ,  $p$ ,  $B$ ,  $P$  della Fig. 3; dall'equazione  $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ$  del § 16, si ricaverà per questa Figura  $(EO)^2 = (OA)^2 + (AE)^2 + HA \cdot AE = 1 + 1 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = \frac{14}{4}$ . Quindi  $EO = \frac{1}{2}\sqrt{14}$ .

In seguito se si confrontino i punti  $A$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $Q$ ,  $q$ ,  $l$  di questa Fig. 45 coi punti  $A$ ,  $B$ ,  $Q$ ,  $P$ ,  $p$ ,  $q$  della fig. 3, aven-

dosi (§ 15) l'equazione per la fig. 3,  $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$ , e moltiplicando per 4,  $4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2$ , ossia  $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$ ; si ricaverà per questa Fig. 45,  $(Ll)^2 = 4(AL)^2 - (AR)^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ , quindi risulta  $Ll = \frac{1}{2}\sqrt{15}$ .

Si ha poi  $BE = 2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{2}\sqrt{16}$ .

Per l'angolo retto  $aAH$  (§ 27, si ha  $(Ha)^2 = (HA)^2 + (Aa)^2 = (\frac{3}{2})^2 + 2 = \frac{17}{4}$ ; quindi  $Ha = \frac{1}{2}\sqrt{17}$ .

Dimostrandosi nella stessa guisa essere  $(AN)^2 = \frac{3}{2}$ , come si è dimostrato di  $(AM)^2$ ; così pure  $(An)^2 = \frac{3}{2}$ ; a cagione che  $NR$  taglia per metà la base  $AE$  del triangolo  $ANE$ , si avrà (§ 26)  $(AN)^2 + (NE)^2 = 2(AR)^2 + 2(RN)^2$ ; cioè  $\frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4} + 2(RN)^2$ ; e riducendo si trova  $(RN)^2 = \frac{3}{2} = (AN)^2$ . Egualmente si trova  $(Rn)^2 = \frac{3}{2}$ . Se ora si confrontano i punti  $H, N, R, n, A$  di questa Figura 45 coi punti  $Q, A, p, B, P$  della Fig. 3; dall'equazione  $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ$  del § 16, si ricaverà per la Figura 45 l'equazione  $(HN)^2 = (AN)^2 + (AH)^2 + AR \cdot AH$ , cioè  $(HN)^2 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{18}{4}$ . Quindi risulta  $HN = \frac{1}{2}\sqrt{18}$ .

Essendo la  $DR$  perpendicolare alla  $AE$ , cioè alla  $HR$ ; sarà  $(HD)^2 = (HR)^2 + (RD)^2$  (47, lib. I)  $= 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}$ ; quindi  $HD = \frac{1}{2}\sqrt{19}$ .

Essendo la base  $aAa$  del triangolo  $aga$  tagliata per mezzo della retta  $gA$ ; si avrà (§ 26)  $(ag)^2 + (ag)^2 = 2(Aa)^2 + 2(Ag)^2$ ; ossia  $(ag)^2 + 1 = 4 + 2$ ; e  $(ag)^2 = 5 = \frac{20}{4}$ ; quindi  $ag = \frac{1}{2}\sqrt{20}$ .

Essendo i due triangoli  $HTV, AED$  di lati eguali tra loro; quindi l'angolo  $VTH = DEA$  (8, lib. I), ed essendo i punti  $H, T, A, E$  sulla stessa retta; sarà la  $VT$  parallela alla sua eguale  $DE$  (29, lib. I) quindi anche la  $VD$  parallela ed eguale alla  $TE$  (33, lib. I). Ma la  $Dd$  è perpendicolare alla  $AE$ , cioè alla  $TE$ ; dunque anche alla  $VD$  (27, lib. I). Quindi  $(dV)^2 = (VD)^2 + (Dd)^2 = (TE)^2 + (BD)^2 = (\frac{3}{2})^2 + 3$  (§ 2)  $= \frac{9}{4} + \frac{12}{4} = \frac{21}{4}$ ; quindi  $dV = \frac{1}{2}\sqrt{21}$ .

Essendosi dimostrata la  $PS$  eguale e parallela alla  $AE$ ; così la  $ps$  per la stessa ragione; sarà anche la  $SE$  eguale e parallela alla  $AP$  (33, lib. I); così la  $sE$  alla  $Ap$ . Per l'eguaglianza e parallelismo delle tre  $PS, TR, ps$  si proverà istessamente l'eguaglianza delle  $RS, Rs$  alla  $PT, pT$  entrambe dimostrate eguali alla  $AP = RQ$ . Confrontando ora i punti  $H, S, E, s, R$  di questa Figura coi punti  $Q, A, p, B, P$  della Fig. 3,

dall'equazione  $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ$  (§ 18) si ricaverà per questa Fig. 45,  $(HS)^2 = (SE)^2 + EH \cdot RH = (RQ)^2 + EH \cdot RH = \frac{9}{4} + \frac{5}{2} \cdot 2 = \frac{22}{4}$ . Quindi  $HS = \frac{1}{2}\sqrt{22}$ .

Essendo la base  $AE$  del triangolo  $AME$  divisa per metà dalla  $MR$ , si avrà (§ 26)  $(AM)^2 + (EM)^2 = 2(RA)^2 + 2(RM)^2$ ; cioè  $\frac{9}{4} + 3 = \frac{9}{4} + 2(RM)^2$ . Quindi riducendo risulta  $(RM)^2 = 2 = (BM)^2 = (Bm)^2$ ; del qual valore si dimostra nella stessa guisa essere  $(Rm)^2$ . Quindi  $BM = MR = Rm = mB$ . Se ora si confrontano i quattro punti  $B, M, R, m$  di questa Figura coi quattro punti  $A, Q, B, q$  della Fig. 3; avendosi dal § 15,  $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$ , e quindi  $4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2$ , cioè  $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$ ; si avrà per questa fig. 45,  $(Mm)^2 = 4(BM)^2 - (BR)^2 = 8 - (\frac{3}{2})^2 = \frac{32}{4} - \frac{9}{4} = \frac{23}{4}$ ; quindi  $Mm = \frac{1}{2}\sqrt{23}$ .

Essendo i triangoli  $BME, BnE$  di lati eguali tra loro, ed avendo entrambi la base comune  $BE$  divisa in due egualmente dalle  $AM, An$ ; dall'equazione del § 26 risulterà lo stesso valore per le due  $AM, An$ . Avendo dunque i triangoli  $BAM, EAn$  i lati tra loro eguali, sarà l'angolo  $BAM = EAn$  (8, lib. I). Quindi a cagione della retta  $BAE$  essendo la somma dei due angoli  $MAB, MAE$  eguale a due retti (13, lib. I), sostituendo all'angolo  $MAB$  il suo eguale  $EAn$ , sarà anche la somma dei due angoli  $MAE, EAn$  eguale a due retti. Quindi le due  $MA, An$  faranno una sola retta (14, lib. I). Sarà dunque  $(Mn)^2 = 4(AM)^2 = \frac{24}{4}$ . Quindi  $Mn = \frac{1}{2}\sqrt{24}$ .

Finalmente  $HE = \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{25}$ .

105. Essendo  $\frac{1}{2}\sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{4}}$ ; per esempio  $\frac{1}{2}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7}{4}}$  ecc., si avranno facilmente da questo Problema le radici di tutti i quarti dall'un quarto fino al venticinque quarti; il che sarà di uso nella costruzione delle Figure simili, come vedremo.

106. Se si fosse preso il raggio  $AB = 2$ ; si sarebbero ottenute tutte queste distanze doppie di valore; quindi avremmo avute le radici intere dei numeri dall'uno fino al venticinque. Si potrebbe però facilmente raddoppiare qualunque di quelle mezze radici, che si volesse, per avere l'intera (§ 64).

107. La facilità di questa costruzione, che si eseguisce coi soli tre compassi delle tre aperture già osservate (§ 35) la prima  $= \sqrt{1}$ , la terza  $= \sqrt{2}$ , la seconda  $= \sqrt{3}$ , coi quali si è già diviso il cerchio in 24 parti eguali, ed ora si sono trovate 25



radici successive dei primi numeri; mostra l'eccellenza della Geometria del Compasso, e quanto possa servire alla perfezione delle Arti.

108. Nella costruzione precedente si ha avuto riguardo ad impiegare più che fosse possibile il primo compasso di apertura  $= 1$ , col quale si è descritta la circonferenza  $Bdd$ , il quale conservando l'apertura fondamentale, merita più degli altri fiducia. Così pure non si è voluto impiegare che i tre primi compassi più rimarcabili (§ 107). Ciò ha fatto, che alcune poche sezioni degli archi sono riuscite di angoli alquanto acuti, come quelle dei punti  $S, s, O, o$  e più quelle dei punti  $L$  ed  $l$ . Chi volesse avere tutti gli angoli d'intersezione più vicini all'angolo retto si potrà servire della seguente

*Altra costruzione della fig. 45.*

109. Trovati come nella soluzione del § 104 i punti  $M$  ed  $m$ ; col raggio  $BD$ , e coi centri  $M$  ed  $m$  si descrivano due archi, che si taglino in  $H$ .

Col raggio  $AB$ , e col centro  $H$  si descriva un arco, che tagli la circonferenza in  $O$  ed  $o$ . Collo stesso raggio si determinino le semicirconferenze  $OE_s, oES$  (§ 64).

Col raggio  $BE$ , e col centro  $H$  si tagli la circonferenza in  $L$  ed  $l$ .

Tutti gli altri punti della figura si trovino come al § 104.

Dimostreremo, che i punti, che si trovano con questa costruzione, sono gli stessi dell'altra.

Essendosi dimostrato (§ 104), che  $BM=MR=Rm=mB$ , e che i tre punti  $B, A, R$  sono nella stessa retta; essendo anche  $MH=ME=mH=mE$  per costruzione;  $H$  sarà sulla stessa retta  $BAR$  (§ 13), e si avrà  $HB=RE$  (§ 14). Dunque  $H$  sarà lo stesso punto, che nell'altra costruzione. Essendo poi eguali le  $HO, Ho$  nelle due costruzioni; anche i punti  $O, o$  saranno gli stessi. Se si sottrae l'arco  $osE$  dalle due semicirconferenze  $BsE, oES$ ; si avranno gli archi residui  $Bo, ES$  eguali. Quindi  $ES=Bo=BO=AQ=RQ$ . Quindi anche il punto  $S$  sarà il medesimo che prima. Egualmente lo sarà il punto  $s$ . Essendo poi la base  $HTR$  del triangolo  $HLR$  divisa in due egualmente dalla  $LT$ ; si avrà (§ 26)  $(HL)^2 + (LR)^2 = 2(HT)^2 + 2(TL)^2$ ; cioè  $4 + (LR)^2 = 2 + 2(TL)^2$ , cioè  $2 + (LR)^2 = 2(TL)^2$ . Ma essendo ancora la base  $TR$  del trian-



golo  $TLR$  divisa per metà in  $A$  dalla retta  $LA$ ; si avrà (§ 26)  $(TL)^2 + (LR)^2 = 2(TA)^2 + 2(AL)^2$ , e duplicando  $2(TL)^2 + 2(LR)^2 = 4(TA)^2 + 4(AL)^2 = 1 + 4 = 5$ ; quindi sottraendo  $2(LR)^2$ , si ha  $2(TL)^2 = 5 - 2(LR)^2$ . Ma si è trovato qui sopra  $2(TL)^2 = 2 + (LR)^2$ . Dunque  $5 - 2(LR)^2 = 2 + (LR)^2$ . E sottraendo 2 e aggiungendo  $2(LR)^2$ ; si ha  $3 = 3(LR)^2$ ; quindi  $1 = (LR)^2 = (AB)^2$ . Sarà dunque  $LR = AB$  come nella prima costruzione. Lo stesso si proverà di  $Rl$ . Gli altri punti sono determinati come prima. Dunque tutti i punti della figura sono gli stessi di prima.

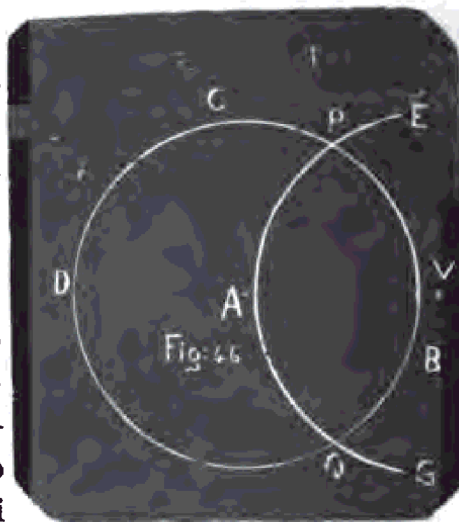
## LIBRO SETTIMO

### DELLA INTERSEZIONE DELLE RETTE COGLI ARCHI DI CERCHIO E TRA LORO

110. Dati due punti  $L$  ed  $M$  (fig. 46) d'una retta, e il centro  $A$  col raggio  $AB$  d'un arco  $BCD$ ; trovare i due punti  $P$  e  $Q$ , nei quali la  $LM$  taglia il detto arco, se pure lo taglia.

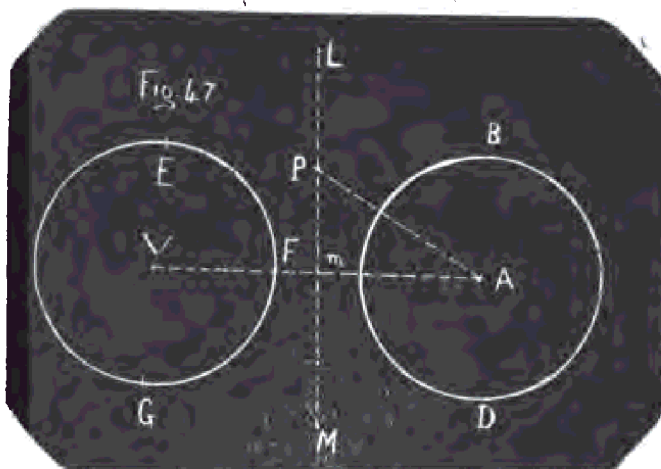
*Sol.* Coi due punti  $L$  ed  $M$  dati nella retta presi per centri, e colle rispettive loro distanze  $MA$ ,  $LA$  dal dato centro presi per raggi si descrivano due archi, che si taglino in  $V$ . Col centro  $V$ , e col dato raggio  $AB$  si descriva un arco indefinito  $EFG$ . Se questo taglia l'arco dato in  $P$  e  $Q$ , questi due punti saranno i cercati. Se non lo tagliasse, nemmeno la retta  $LM$  taglierebbe l'arco dato.

*Dim.* Essendo eguali tra loro le quattro distanze  $AP$ ,  $AQ$ ,  $VP$ ,  $VQ$ , e le due tra loro,  $AM$ ,  $VM$ ; i tre punti  $P$ ,  $M$ ,  $Q$  saranno nella stessa retta (§ 13). Nella stessa guisa si dimostra, che sono nella stessa retta i tre punti  $Q$ ,  $P$ ,  $L$ . Dunque la retta  $LM$  passa per  $P$  e  $Q$ , quando questi punti d'intersezione vi siano.



Se il cerchio  $EFG$  descritto col raggio  $AB$  (fig. 47) e col centro  $V$  non tagliasse il cerchio  $BCD$ ; la  $LM$  non taglierebbe questo stesso cerchio.

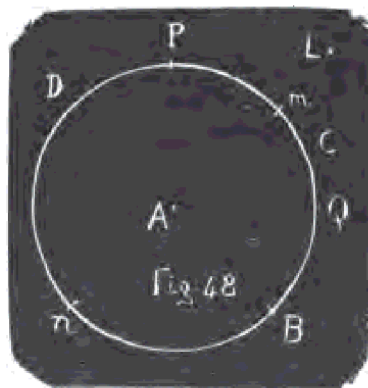
Poichè se si concepisca la retta  $VA$ , che tagli i cerchj in  $C$  ed  $F$ ; divisa per metà la  $CF$  in  $m$ ; sarà  $Vm = mA$ . Dunque la  $LM$  taglierà perpendicolarmente la  $VA$  in  $m$  (§ 14) fuori del cerchio  $BCD$ . Se si piglia un qualunque altro punto



punto  $P$  nella retta  $LM$ ; nel triangolo rettangolo  $Pm$  si avrà il lato  $PA$  maggiore di  $mA$ , perchè opposto ad un angolo maggiore (32 e 18, lib. I). Sarà dunque molto più fuori del circolo il punto  $P$  del punto  $m$ . Dunque in nissun punto la retta  $LM$  taglierà il circolo  $BCD$ .

111. *Prob.* Dato un arco  $BCD$  descritto col centro  $A$  (fig. 48); trovare i due punti, dove taglia la circonferenza la retta, che passa per  $A$  e per un altro punto dato  $L$ .

*Sol.* Col centro  $L$ , e con un raggio arbitrario  $LP$  si descriva un arco, che tagli l'arco  $BCD$  in  $P$  e  $Q$ . Si divida l'arco  $PQ$  per metà in  $m$  (§ 60). Si determini la semicirconferenza  $mDn$  (§ 64). Saranno  $m$  ed  $n$  i due punti cercati.



*Dim.* Essendo nella stessa distanza dai due punti  $P$  e  $Q$  i tre punti  $A$ ,  $m$  ed  $L$ , saranno nella stessa retta (§ 13). Ma nella retta  $mA$  si trova anche il punto  $n$  estremo del diametro  $mn$  (15, lib. IV), Dunque ecc.

112. *Prob.* Dati due punti  $A, B$  d'una retta (fig. 49 e 50), e due punti  $C, D$  d'una altra; trovare il punto  $S$  dove si tagliano.

*Sol.* Coi due punti d'una delle due rette, per esempio coi

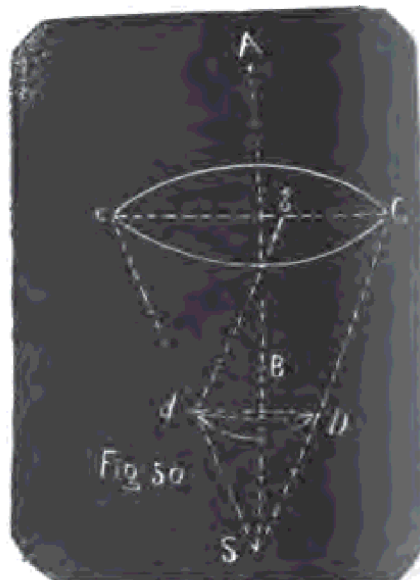
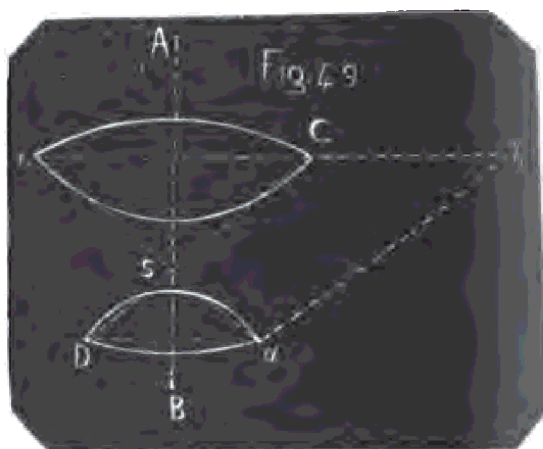
punti  $A$  e  $B$  presi per centri, e colle distanze rispettive di essi punti  $AC$ ,  $AD$ ;  $BC$ ,  $BD$  dai due punti dell'altra retta  $C$ ,  $D$  prese per raggi, si descrivano quattro archi, due dei quali si tagliano in  $C$  e  $c$ , e due in  $D$  e  $d$ .

Si trovi il quarto punto  $\delta$  del parallelogrammo  $CDd\delta$  col fare a  $Dd = C\delta$ ; a  $DC = d\delta$  (§ 11).

Si trovi la quarta proporzionale alle tre  $c\delta$ ,  $CD$ ,  $Cc$ .

Con questa presa per raggio, e coi centri  $C$  e  $c$  si descrivano due archi, che si taglino in  $S$ . Sarà  $S$  il punto dell'intersezione delle due rette  $AB$ ,  $CD$ .

*Dim.* Le rette  $AB$ ,  $Cc$  saranno pendicolari una all'altra (§ 13, 14); così pure le  $AS$ ,  $Cc$ . Dunque il punto  $S$  sarà nella stessa  $AB$ . Essendo poi la  $AB$ , ossia  $AS$  perpendicolare anche alla  $Dd$  (§ 13, 14), sarà la stessa  $Dd$  parallela alla  $Cc$  (29, lib. I). Ma pei lati eguali tra loro nei due triangoli  $dC\delta$ ,  $dCD$  si hanno gli angoli  $dC\delta$ ,  $CdD$  eguali (8, lib. I). Dunque sono parallele anche le due  $C\delta$ ,  $Dd$  (28, lib. I). Dunque i punti  $c$ ,  $C$ ,  $\delta$  sono nella stessa retta. Ora a cagione dei due lati eguali nei due triangoli  $CBA$ ,  $cBA$  si avranno eguali gli angoli  $CBA$ ,  $cBA$  (8, lib. I). Per la stessa ragione nei triangoli  $ABD$ ,  $ABd$  si trovano eguali gli angoli  $ABD$ ,  $ABd$ . Dunque nella Figura 49 l'angolo  $cBd$ , che è la somma dei due  $cBA$ ,  $ABd$ , sarà eguale all'angolo  $CBD$ , somma dei due  $CBA$ ,  $ABD$ . Nella Figura 50 poi l'angolo  $cBd$ , che è la differenza dei due  $ABd$ ,  $cBA$ , sarà pure eguale all'angolo  $CBD$ , che è la differenza dei due  $ABD$ ,  $CBA$ . In tutte due le Figure adunque nei due triangoli  $cBd$ ,  $CBD$ , che hanno due

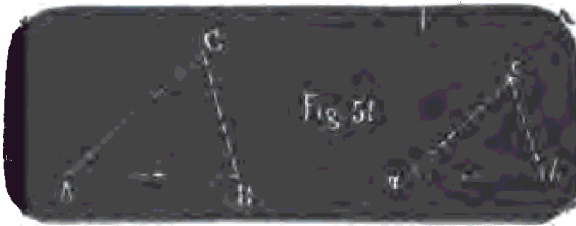


lati e l'angolo compreso eguale, sarà il terzo lato  $cd$  eguale al terzo  $CD$  (4, lib. I). Ma  $CD = d\delta$ . Dunque il triangolo  $cd\delta$  è isoscele. È poi isoscele anche il triangolo  $cCS$ , e si ha la proporzione: la  $c\delta$  alla  $CD$ , ovvero alla  $d\delta$ , come la  $Cc$  alla  $CS$ ; onde viene ancora  $c\delta : cd :: cC : cS$ . Dunque i due triangoli  $cd\delta$ ,  $cCS$  hanno gli angoli eguali tra loro (5, lib. VI). Quindi essendo l'angolo  $c\delta d = cCS$ ; sarà la  $CS$  parallela alla  $\delta d$  (29, lib. I), alla quale essendo pur parallela la  $CD$ , sarà in essa il punto  $S$ . Dunque ecc.

## LIBRO OTTAVO

### DELLA COSTRUZIONE, MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE DEGLI ANGOLI E DELLE LINEE TRIGONOMETRICHE

113. *Avv.* Quando noi diremo: *costruire un angolo abc col compasso* (fig. 51), intendremo di dire: *trovare col compasso tre punti a, b, c; ovvero dato, alcuno di essi, trovare gli altri in guisa che volendo poi guidare per due di essi a, b una retta, e per uno di essi due b e pel terzo c un'altra retta; si abbia un angolo abc della quantità che si vuole.* Benchè l'angolo  $abc$  non sia veramente costruito, se non quando si sono guidate attualmente le rette  $ab$ ,  $bc$ , per tirare le quali non può bastare il compasso solo; non ostante per brevità adopreremo spesso la prima frase, intendendo, che equivalga nel sentimento alla seconda.



114. *Prob.* Essendo dato un angolo  $ABC$  per via dei tre punti  $A, B, C$  (fig. 51), e dati due altri punti  $b$  ed  $a$ ; trovare un punto  $c$ , cosicchè l'angolo  $abc$  sia eguale ad  $ABC$ .

*Sol.* Trovata (§ 93) una quarta proporzionale alle tre distanze  $AB, ab, BC$ , con questa presa per raggio, e col centro  $b$  si descriva un arco, che passi per  $c$ . Trovata pure una quarta proporzionale alle tre  $AB, ab, AC$ , con essa per raggio, e col

centro  $a$  si descriva un altro arco, che tagli il primo in  $c$ . Sarà l'angolo  $abc = ABC$ .

*Dim.* Poichè i due triangoli  $ABC$ ,  $abc$  hanno i lati proporzionali, avranno eguali gli angoli opposti ai lati proporzionali (5, lib. VI).

115. Servirà adunque la soluzione del Problema precedente (§ 114) a sciogliere anche il problema: Dati i tre punti (fig. 51)  $A, B, C$  estremi agli angoli di un triangolo, e due  $a, b$  estremi di un altro, trovare il terzo estremo  $c$  in guisa, che il triangolo  $abc$  riesca simile al triangolo  $ABC$ .

116. *Prob.* Duplicare, triplicare, quadruplicare ecc. (fig. 52) un angolo dato  $BAC$  (§ 113).

*Sol.* Col centro  $A$ , e coi raggi  $AB, AC$  si descrivano due archi indefiniti  $BDF, CE$ . Si faccia a  $CB = CD$ . Sarà l'angolo  $BAD$  duplo di  $BAC$ .

Si faccia a  $CD = DE$ . Sarà l'angolo  $BAE$  triplo di  $BAC$ .

Si faccia a  $DE = EF$ . Sarà  $BAF$  quadruplo di  $BAC$  ecc.



Per quadruplicarlo si poteva ancora fare a  $BD = DF$ .

*Dim.* Avendo i triangoli  $BAC, CAD, DAE, EAF$ , ecc. tutti i lati rispettivamente eguali, saranno eguali gli angoli  $BAC, CAD, DAE, EAF$ , ecc. (8, lib. I). Dunque ecc. Quindi essendo l'angolo  $BAD = DAF$ , sarà anche  $BD = DF$  (4, lib. I).

117. *Prob.* Esaminare se l'angolo  $BAG$  (fig. 53) dato per via dei tre punti  $B, A, G$  sia semiretto.

*Sol.* Col raggio  $AB$ , centro  $A$  si descriva la semicirconferenza  $BFE$  (§ 64). Si faccia a  $GB = GF$  (§ 10). Se sarà  $BF = FE$ ; l'angolo  $BAG$  sarà semiretto. Se sarà  $BF$  minore o maggiore di  $FE$ ; l'angolo  $BAG$  sarà minore o maggiore di un semiretto.



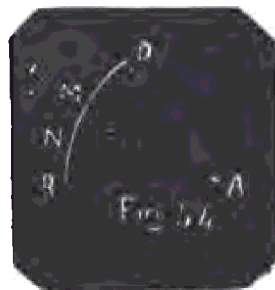
*Dim.* Poichè l'angolo  $BAF$  è duplo dell'angolo  $BAG$  (§ 116); se l'angolo  $BAG$  è semiretto, sarà retto  $BAF$ ; quindi  $BF = FE$  (§ 83). Altrimenti se  $BAG$  è minore o maggiore di un semi-



retto, sarà  $BAF$  minore o maggiore di un retto; quindi  $BF$  minore o maggiore di  $FE$  (24, lib. I).

118. *Prob.* Dividere per metà l'angolo  $BAC$  (fig. 54) dato pei tre soli punti  $B, A, C$  nei quali  $A$  è disugualmente lontano da  $B$  e da  $C$ .

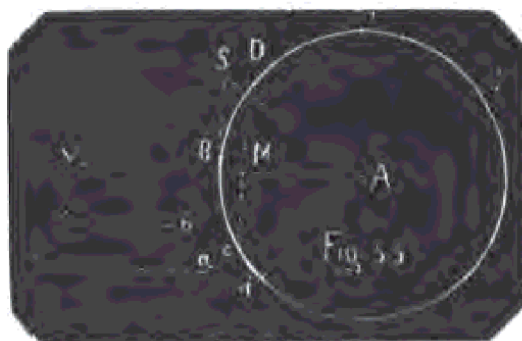
*Sol.* Col centro  $A$ , raggio  $AB$  sia descritto l'arco  $BMD$ . Si faccia a  $CB=CD$ . Si divida l'arco  $BMD$  per metà in  $M$  (§ 60). Si divida l'arco  $BM$  per metà in  $N$ . Sarà l'angolo  $BAN$  la metà dell'angolo  $BAC$ .



*Dim.* Essendo l'angolo  $BAD$  duplo di  $BAC$  (§ 116) e duplo parimente di  $BAM$  (33, lib. VI); sarà l'angolo  $BAC$  lo stesso che  $BAM$ . Ma l'angolo  $BAN$  è la metà di  $BAM$ . Dunque ecc.

119. *Prob.* Dato l'arco  $BC$  (fig. 55) descritto col centro  $A$ , trovare il suo seno, il coseno, la tangente e la secante.

*Sol.* Nella circonferenza descritta col raggio  $AB$  si faccia a  $BC'=Bc$ . Si divida per metà la  $Cc$  in  $M$  (§ 66). Sarà  $CM$  il seno,  $MA$  il coseno.



Col centro  $M$ , raggio  $MA$  si descriva un arco, che tagli, se può, la circonferenza in  $D$  e  $d$ . Si determini la semicirconferenza  $dD\delta$  (§ 64). Per lo stesso § si aggiunga alla  $BA$  la sua eguale  $BV$ . Coi centri  $A$  e  $V$ , e col raggio  $D\delta$  si descrivano due archi, che si taglino in  $S$ . Sarà  $BS$  la tangente,  $SA$  la secante.

*Dim.* La  $BA$  taglia la  $Cc$  ad angoli retti per metà in  $M$  (§ 14). Dunque  $CM$  è il seno,  $MA$  è il coseno dell'arco  $BC$ . La  $SB$  è perpendicolare alla  $AB$  (§ 83). La  $D\delta$  è terza proporzionale alle due  $AM, AC$  (§ 87); quindi anche la sua eguale  $AS$ . Dunque nei due triangoli rettangoli  $AMC, ABS$  si ha la proporzione  $AM:AC::AB:AS$ , ed invertendo (4, lib. V)  $AC:AM::AS:AB$ . Quindi (35, lib. V)  $(AC)^2:(AM)^2::(AS)^2:(AB)^2$ . E sostituendo ad  $(AC)^2$  e ad  $(AS)^2$  i loro valori tratti dalla 47, lib. I, si avrà  $(AM)^2+(MC)^2:(AM)^2::(AB)^2+(BS)^2::(AB)^2$ .



Quindi (17, lib. V)  $(MC)^2 : (AM)^2 :: (BS)^2 : (AB)^2$ . Quindi (34, lib. V)  $MC : AM :: BS : AB$ . Quindi anche i lati  $MC$ ,  $BS$  sono proporzionali. Si avrà dunque l'angolo  $MCA$  lo stesso che  $BSA$  (5, lib. VI). Quindi i punti  $A$ ,  $C$ ,  $S$  saranno nella stessa retta, e  $BS$  sarà la tangente ed  $AS$  la secante dell'arco  $BC$ .

Se il cerchio descritto col centro  $M$ , raggio  $MA$ , non tagliasse la circonferenza, o la tagliasse ad angoli troppo acuti, converrebbe ricorrere al § 89 o ai §§ 90 e 91.

*Altra Sol. per aver la tangente e la secante.* Si determini la semicirconferenza  $BCE$  (fig. 56) (§ 64). Col raggio  $BC$ , centro  $E$  si tagli questa in  $Q$ . Col raggio  $CQ$ , e coi centri  $A$  e  $B$  si segnino due archi, che si taglino in  $V$ . Collo stesso raggio  $CQ$ , centro  $V$  si tagli la circonferenza in  $e$ . Col raggio  $Ee$ , e coi centri  $A$  e  $B$  si segnino due archi, che si taglino in  $m$ . Collo stesso raggio  $Ee$ , centro  $m$  si descriva la semicirconferenza  $ABS$  (§ 64). Sarà  $SB$  la tangente,  $SA$  la secante.



*Dim.* Se sia l'arco  $BCF$  eguale al al quadrante  $= FE$ ; per essere  $BC = QE$ ; sarà anche  $CF = FQ$ . Sarà poi per le definizioni trigonometriche il seno dell'arco  $CF$  la stessa cosa, che il coseno dell'arco  $BC$ . La corda poi dell'arco  $CFQ$ , doppio dell'arco  $CF$ , sarà doppia del seno dell'arco  $CF$ , ossia del coseno dell'arco  $BC$ . Questa corda è  $CQ = AV$ . Si ha poi (§ 22)  $AV \cdot Ee = (AB)^2$ . Per essere poi retta la  $AmS$  (§ 64)  $= 2Ee$  e  $AV = 2 \cos BC$ ; si avrà  $2Ee \cdot \cos BC = (AB)^2 = AS \cdot \cos BC$ . Quindi  $\cos BC : AB :: AB : AS$  (17, lib. VI). Sarà dunque  $AS$  terza proporzionale al coseno ed al raggio; e però sarà eguale alla secante, secondo le dimostrazioni trigonometriche. È poi retto l'angolo  $ABS$  (31, lib. III). Sarà dunque  $AS$  la secante nella sua posizione, e quindi  $BS$  la tangente.

120. *Prob.* Dato il seno  $mn$  (fig. 57) d'un arco d'un raggio dato  $AB$ , trovare quest'arco.

*Sol.* Descritto il cerchio  $CcK$  col raggio  $AB$ , si trovi una dupla della  $mn$  (§ 64). Con essa presa per raggio, e fatto centro

in qualche punto  $C$  della circonferenza si descriva un arco, che la tagli in  $c$ . Si divida l'arco  $Cc$  per metà in  $B$  (§ 60). Sarà  $BC$  l'arco cercato.

*Dim.* Il seno dell'arco  $BC$  per la definizione trigonometrica è la metà della corda dell'arco doppio di  $BC$ . Dunque ecc.

121. *Prob.* Dato il coseno  $ma$  (fig. 57) d'un arco di un raggio dato  $AB$ , trovare quest'arco.



*Sol.* Descritto il cerchio  $CcK$  col raggio  $AB$  si trovi una dupla della  $ma$  (§ 64). Fatto centro in qualche punto  $c$  della circonferenza con questa dupla presa per raggio si tagli la circonferenza in  $K$ . Si determini la semicirconferenza  $KcC$  (§ 64). Si divida per metà l'arco  $Cc$  in  $B$  (§ 60). Sarà  $BC$  l'arco cercato.

*Dim.* Sia guidata l'altra corda  $Cc$ . Essa sarà divisa per metà in  $M$  ad angoli retti dal raggio  $AB$  (§ 14). Ma anche l'angolo  $CcK$  è retto (31, lib. III), essendo nel semicerchio  $CcK$ . Dunque i due triangoli  $CMA$ ,  $CcK$ , che hanno un angolo comune in  $C$  e l'altro retto, sono equiangoli tra loro (32, lib. I), e si ha (4, lib. VI)  $CM : Cc :: MA : cK$ . Ma  $CM$  è la metà di  $Cc$ . Dunque  $MA = \frac{1}{2} cK = ma$ . È poi  $MA$  il coseno dell'arco  $BC$ . Dunque ecc.

122. *Prob.* Data la tangente  $sb$  di un arco di raggio dato  $AB$  (fig. 55), trovare quest'arco.

*Sol.* Descritto col raggio  $AB$  il cerchio  $BC\delta$ ; alla  $AB$  si ponga in  $B$  perpendicolare la  $BS = bs$  (§ 76). Si trovi il punto  $C$ , dove la  $SA$  taglia la circonferenza (§ 111). Sarà  $BC$  l'arco cercato.

Questa Soluzione non ha bisogno di dimostrazione.

123. *Prob.* Data la secante  $sa$  di un arco di raggio dato  $AB$  (fig. 55), trovare quest'arco.

*Sol.* Descritta col raggio  $AB$  la circonferenza  $BC\delta$ , e posta sulla  $AB$  l'eguale  $BV$  (§ 64), coi centri  $A$  e  $V$ , e col raggio  $sa$  si descrivano due archi, che si taglino in  $S$ . Si trovi il punto  $C$ , dove la  $SA$  taglia la circonferenza (§ 111). Sarà  $BC$  l'arco cercato.

*Dim.* La  $SB$  sarà perpendicolare alla  $BA$  (§ 83); dunque sarà la tangente dell'arco  $BC$ , e quindi  $SA$  la secante.

## LIBRO NONO

### DELLE FIGURE SIMILI E DEI POLIGONI REGOLARI

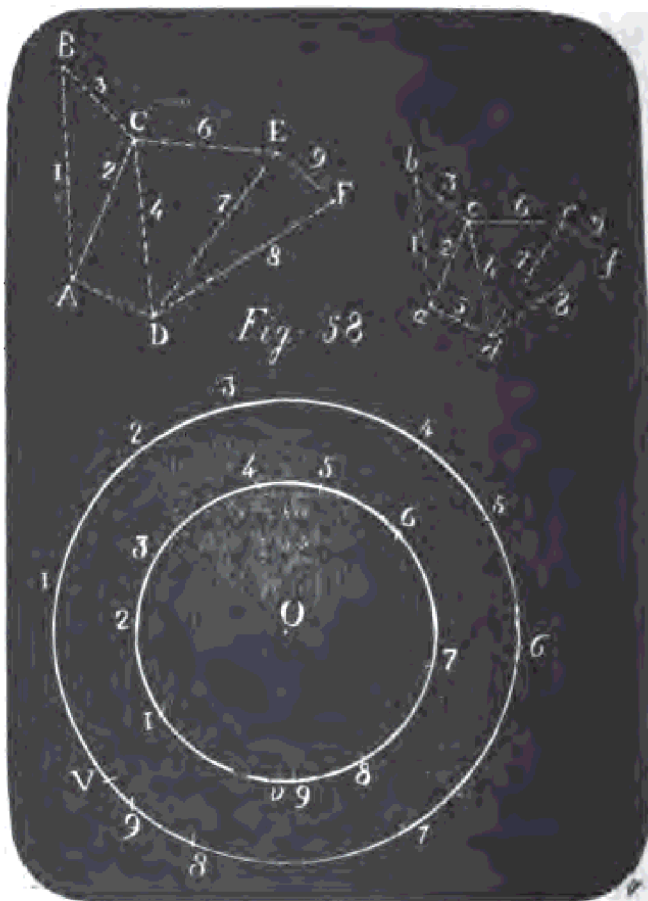
124. *Avv.* Quando diremo: *costruire una figura o un poligono*, intendiremo di dire: *trovare tutti que' punti, che bastano a determinare la posizione e la grandezza di quelle rette, che si devono guidare per costruire interamente il poligono.*

125. *Prob.* Sopra un dato lato  $ab$  (fig. 51) costruire un triangolo simile a un dato triangolo  $ABC$ .

*Sol.* Vedi il § 115.

126. *Prob.* Costruire una figura simile ad una data (fig. 58)  $ABCEFD$ , che abbia un dato rapporto di area con essa.

*Sol.* Si voglia per esempio, che la nuova figura abbia due quinti di area della figura data. Con un raggio  $AB$ , il maggiore che si possa commodamente, si costruisca la figura 43 (§ 100). Presa da essa figura la  $Aa=\sqrt{2}$  per raggio, e fatto centro in  $O$  (fig. 58), si descriva il cerchio minore, nella di cui circonferenza è il punto  $v$ . Presa dalla fig. 43 la  $ET=\sqrt{5}$  per raggio, collo stesso centro  $O$  si descriva il cerchio



maggiore, nella di cui circonferenza è il punto  $V$ , il quale si marchi in tal luogo per rapporto al punto  $v$ , che la  $Vv$  riesca press'a poco tangente al cerchio interno in  $v$ .

Si supponga divisa la figura data in tanti triangoli  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $CDE$ ,  $EDF$ , immaginandovi delle rette  $AC$ ,  $CD$  ecc.

Si pongano dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, ecc. alle distanze  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ ,  $CD$ , ecc., che misurano i lati di questi triangoli.

Si applichino queste distanze 1, 2, 3 ecc. successivamente come corde a tanti archi successivi del cerchio  $V$ , cioè la  $AB$  da  $V$  in 1; la  $AC$  da 1 in 2; la  $BC$  da 2 in 3, ecc. fino in fine; il che si fa prendendo la distanza  $AB$  per raggio, e fatto centro in  $V$ , tagliando questa stessa circonferenza con un arco in 1, ecc.

Colla distanza  $Vv$  presa per raggio si faccia centro successivamente nei punti 1, 2, 3, 4, ecc., e si descrivano degli archi, che taglino successivamente la circonferenza minore in 1, 2, 3, 4, ecc. fino in fine.

Le corde del cerchio interno, ossia le distanze da  $v$  ad 1, da 1 a 2, da 2 a 3, da 3 a 4, ecc. saranno i lati  $ab$ ,  $ac$ ,  $bc$ ,  $cd$ , ecc. della nuova figura, la quale si costruirà triangolo per triangolo. Colla distanza da  $v$  in 1 si marcheranno i due punti  $a$   $b$ . Coi centri  $a$  e  $b$ , e colle distanze seconda e terza prese dal cerchio interno (la seconda è dall' 1 al 2; la terza dal 2 al 3) si segneranno due archi, che si taglino in  $c$ . Coi centri  $c$  ed  $a$ , e colle distanze quarta e quinta prese dal cerchio interno (la quarta è dal 3 al 4, la quinta dal 4 al 5) si segneranno due archi, che si taglino in  $d$ . Nella stessa maniera si troveranno i punti  $e$  ed  $f$ , e sarà costruita la figura.

*Dim.* Le corde del cerchio interno stanno alle rispettive corde del cerchio esterno, come sta il raggio  $Ov$  al raggio  $OV$  (§ 93), cioè come  $\sqrt{2}$  sta a  $\sqrt{5}$ . Dunque nella stessa ragione stanno tutti i lati dei triangoli della figura  $abcefd$  ai rispettivi lati dei triangoli della figura  $ABCEFD$ . Dunque i triangoli delle due figure sono tra loro equiangoli e simili (5, lib. VI, def. 1<sup>a</sup>). Dunque le due stesse figure poligone sono simili (20, lib. VI), ed essendo la proporzione, ossia ragione delle aree dei poligoni duplicata della ragione dei lati (ivi); sarà l' area del poligono  $abcefd$  all' area  $ABCEFD$  come 2 a 5. Sarà dunque

l'area della figura minore eguale a due quinti della maggiore.

Da quest' esempio si vede cosa si dovrà fare, qualunque altro sia il rapporto, nel quale si voglia, che l'area della figura da costruirsi sia alla data. Si descriveranno due circonferenze  $v$  e  $V$ , i raggi delle quali staranno tra loro nel rapporto delle radici dei numeri, che formano il rapporto delle aree. Nella circonferenza, che corrisponde alla figura data, si porranno successivamente per corde i lati dei triangoli, nei quali si suppone divisa la figura data. Per via di queste col metodo indicato si troveranno delle corde proporzionali nell'altra circonferenza. Queste saranno i rispettivi lati dei triangoli della nuova figura.

Il rapporto delle mezze radici e delle intere essendo lo stesso, servirà in molti casi la fig. 45 (§ 104). Per gli altri casi vedi i §§ 101, 102 e 103.

Si sceglie poi un raggio  $AB$ , che sia il possibile maggiore comodamente (fig. 44 e 45), perchè i due cerchj sieno meglio capaci delle grandezze delle corde da applicarvisi, e perchè le intersezioni, che ne nascono, faccian angoli più vicini al retto.

127. Se il rapporto fosse dato tra i lati  $AB$  ed  $ab$  di essi tra loro, o di qualunque altre due rette fra loro; in questo rapporto si sceglierebbero i due raggi  $OV$ ,  $Ov$ , i maggiori possibili.

128. *Prob.* Iscrivere ad un cerchio dato un poligono regolare tra quelli, che si possono inscrivere ad esso col compasso e colla riga.

*Sol.* Si divida la circonferenza in un numero di parti eguali al numero de' lati del poligono, che si vuole (§§ 27, 29, 30, 31, 32, 38, 40, 41, 42, 53, 57, 60, 63). I punti della divisione saranno i vertici del poligono regolare cercato (§ 124), e le corde degli archi saranno i lati.

*Dim.* Tutti i lati sono eguali, perchè sono corde di archi eguali. Anche gli angoli sono eguali, poichè essendo alla circonferenza insistono ad un egual numero di archi eguali (21, lib. III). Dunque si ha un poligono regolare del numero che si voleva di lati iscritto al cerchio (def. 1<sup>a</sup>, lib. III).

129. Essendo 240 le parti (§ 57), nelle quali con tre punti soli presi fuori della circonferenza si può dividere essa circon-



ferenza con sei aperture di compasso al più (§ 59); tanti saranno i poligoni regolari, che con questi tre punti, e sei aperture di compasso si potranno iscrivere al cerchio, quanti sono i diversi numeri, che dividono esattamente il 240. Ora questi numeri sono i seguenti 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240. Dunque omettendo il 2, si potrà iscrivere un poligono regolare di 3 lati, di 4 lati, di 5, di 6, di 8, di 10, ecc., fino al poligono di 240 lati.

130. Se il numero dei lati del poligono che si vuole, si trova essere uno di quelli, pei quali si è divisa la circonferenza ai §§ 27, 30 e seguenti, per esempio il 12, si divida la circonferenza in 12 parti eguali (§ 31); i due punti estremi di ciascuna di queste saranno ai vertici degli angoli del poligono che si vuole iscrivere; ossia, ciò che è lo stesso, le corde di questi archi saranno i lati del poligono.

Se il numero dei lati del poligono che si vuole, non si trovasse espressamente nei Problemi del Libro secondo: come per esempio se si volesse costruire un poligono di sessanta lati; si duplichi, si triplichi o si quadruplichi, ecc. questo numero, finchè si arrivi ad avere uno dei numeri, che si contengano espressamente nei Problemi; nell'esempio addotto si duplichi il 60, e si avrà 120; il qual numero si trova espressamente al § 42, dove si dà il modo di dividere la circonferenza in 120 parti eguali. Queste parti prendendole a due a due ci somministreranno 60 archi eguali; le corde dei quali saranno i 60 lati del poligono che si voleva. Se si avesse dovuto triplicare il numero, come nel caso, che si fosse voluto un poligono di 16 lati; divisa allora la circonferenza in 48 parti (§ 38), numero triplo del 16, si dovranno prendere tre di questi archi per avere un arco, che sia la sedicesima parte della circonferenza: ognuno di questi archi eguali avrà per corda un lato del poligono di sedici lati ed angoli.

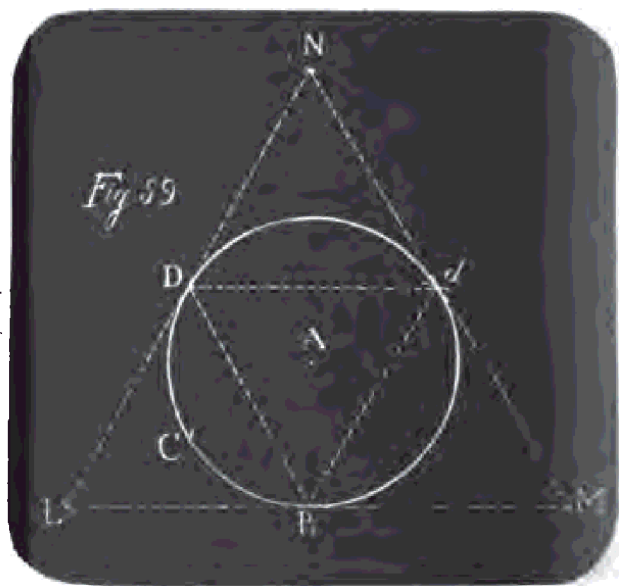
130. *Prob.* Ad un cerchio dato  $BCDd$  (fig. 59) circoscrivere un triangolo equilatero (§ 124).

*Sol.* Si faccia al raggio di questo cerchio  $AB=BC=CD$ ; a  $BD=BL=DL=Dd=DN=dN=dM=BM$ .

I tre punti  $L, M, N$  saranno i vertici del triangolo equilatero circoscritto al cerchio.



*Dim.* Il triangolo  $BDd$  è equilatero iscritto al cerchio (§§ 29 e 131). Ai lati di questo hanno eguali i lati i triangoli  $DLB$ ,  $NDd$ ,  $dBM$ ; dunque saranno eguali i loro angoli (8, lib. I). Perciò i tre angoli  $NDd$ ,  $dDB$ ,  $BDL$  saranno eguali ai tre angoli del triangolo iscritto, cioè a due retti (32, lib. I). Quindi la  $NDL$  sarà retta (14, lib. I). Lo stesso si dimostrerà delle altre due  $LBM$ ,  $NdM$ . Saranno poi ciascuna di esse dupla del lato  $BD$ , dunque eguali tra loro. Dunque il



triangolo  $LMN$  è equilatero. Essendo poi gli angoli  $NDd$ ,  $DLB$  eguali, sarà la  $Dd$  parallela alla  $LB$  (29, lib. I), ossia alla  $LM$ . Ora i punti  $N$ ,  $A$ ,  $B$  sono in una retta perpendicolare alla  $Dd$  (§§ 13 e 14). Dunque la  $AB$  è perpendicolare anche alla  $LM$  (27, lib. I). Dunque la  $LM$  è tangente del cerchio (16, lib. III). Lo stesso si dimostrerà delle due  $NL$ ,  $NM$ . Dunque il triangolo  $NLM$  è equilatero circoscritto al cerchio (def. 2ª, lib. IV).

132. *Prob.* Ad un dato cerchio (fig. 60) circoscrivere un quadrato.

*Sol.* Si divida la sua circonferenza in quattro parti eguali nei punti  $B$ ,  $F$ ,  $E$ ,  $f$  (§ 27). Con questi punti presi per centri, e col raggio  $AB$  si segnino degli archi, che si taglino in  $R$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $V$ . Saranno questi ultimi quattro punti i vertici del quadrato circoscritto al cerchio.

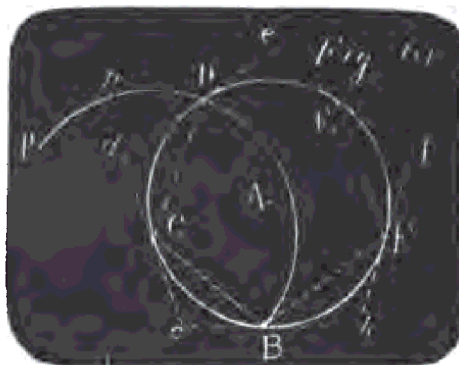
*Dim.* L'angolo  $TBA$  è retto (§ 100). Nella stessa guisa si dimostra essere retto l'angolo  $SBA$ . Dunque  $TBS$  è una retta (14, lib. I) perpendicolare



al diametro  $BE$ , e però tangente al cerchio (16, lib. III). Lo stesso si dimostra delle altre  $TFV$ ,  $VER$ ,  $RfS$ . Avendo poi il triangolo  $BFT$  i lati eguali rispettivamente ai lati del triangolo  $BFA$ ; sarà l'angolo  $BTF = BAF$  (8, lib. I); quindi retto (§ 27). Lo stesso si dimostra degli altri angoli  $V$ ,  $R$ ,  $S$ . Dunque ecc.

133. Ad un dato cerchio circoscrivere un pentagono regolare.

*Sol.* Sia il cerchio  $BDE$  descritto col raggio  $AB$  (fig. 61). Si divida la sua circonferenza in cinque parti eguali (§ 40) nei punti  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Fatto centro in uno di questi punti  $C$ , col raggio  $CB$  si descriva la semicirconferenza  $BDP$  (§ 64). Preso per centro il punto  $E$  opposto

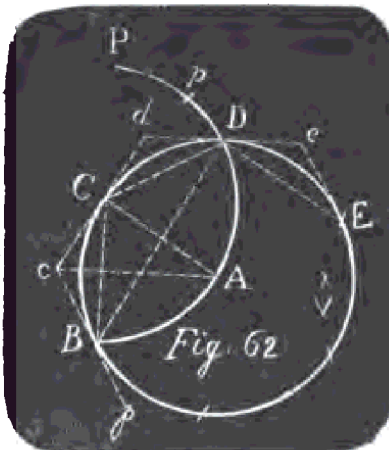


all'arco  $CB$ , col raggio  $EC$  si tagli l'arco  $BDP$  in  $p$ . Col raggio  $Pp$ , e coi centri  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  si segnino degli archi, che si taglino in  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ . Saranno questi ultimi punti i vertici degli angoli del pentagono circoscritto al cerchio.

Per dimostrazione di questo Problema servirà la dimostrazione del seguente.

134. *Prob.* Dati i vertici d'un poligono regolare inscritto al cerchio (fig. 62); trovare i vertici d'un simile poligono regolare circoscritto.

*Sol.* Sieno i punti  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , ecc. vertici del poligono inscritto al cerchio. Con uno di essi  $C$  preso per centro, e colla distanza di due d'essi  $CB$  presa per raggio si descriva la semicirconferenza  $BDP$  (§ 64). Coi centri  $B$  e  $C$ , e col raggio  $BD$  si segnino due archi, che si taglino in  $V$ . (Nel caso del pentagono (fig. 61) il punto  $V$  coincide col punto  $E$ ). Con questo stesso raggio  $BD$ ,



e col centro  $V$  si tagli la circonferenza  $BDP$  in  $p$ . Col raggio  $Pp$ , e coi centri  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , ecc. vertici dell'inscritto si descri-

vano degli archi, che si taglino nei punti  $b, c, d, e$ , ecc. Questi saranno i vertici del poligono regolare circoscritto.

*Dim.* Pel § 22 si ha  $pP \cdot VC = (CD)^2$ , cioè  $cC \cdot BD = (BC)^2$ . Quindi (17, lib. VI)  $BD : BC :: BC : Cc$ . Ma  $BC = CD$  e  $Bc = cC$ . Dunque nei due triangoli isosceli  $BCD, BcC$  tutti i lati saranno proporzionali. Dunque (5, lib. VI) sarà l'angolo  $cCB = CBD$ . Quindi le due  $cC, BD$  saranno parallele (28, lib. I). Nella stessa guisa si proverà, che alla stessa  $BD$  è parallela anche la  $Cd$ . Saranno dunque i punti  $c, C, d$  nella stessa retta. Ma per essere  $BC = CD$ , il raggio  $AC$  è perpendicolare alla  $BD$  (§ 14). Dunque anche alla  $cd$  (29, lib. I). Dunque la  $cd$  è tangente (16, lib. III) alla sua metà in  $C$ . Lo stesso si dimostra della  $de = cd$  nella sua metà in  $D$ , e così delle altre. Saranno poi queste tante di numero, quanti sono i punti  $B, C, D, E$ , ecc. Dunque ecc. (def. 2<sup>a</sup>, lib. IV).

135. *Prob.* Sopra un dato lato  $AE$  costruire un triangolo equilatero (Fig. 1).

*Sol.* Si trovi il punto  $D$  come nel § 1. Sarà  $ADE$  il triangolo cercato.

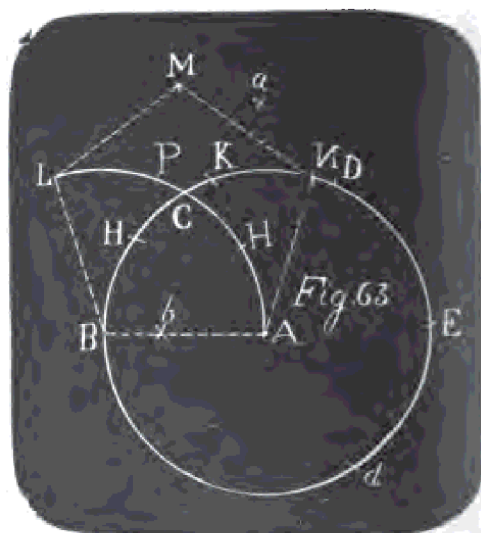
136. *Prob.* Sopra un dato lato  $AB$  costruire un quadrato.

*Sol.* Si trovino come al § 100 i due punti  $F, T$ . Sarà  $ABTF$  il quadrato cercato (fig. 43).

*Dim.* Essendosi ivi dimostrato essere la  $BT$  eguale e parallela ad  $FA$ , e perciò perpendicolare ad  $AB$ ; anche la  $FT$  sarà parallela alla  $BA$  (33, lib. I). Quindi anche gli angoli  $BTF, AFT$  saranno retti (27, lib. I), e  $ABTF$  un quadrato (Def. 32, lib. I).

137. *Prob.* Sopra un dato lato  $AB$  costruire un pentagono regolare (Fig. 63).

*Sol. I.* Col raggio  $AB$  centro  $A$  si descriva la circonferenza  $BCDEd$ , e si faccia ad  $AB = BC = CD = DE = Ed$ . Si faccia a  $BD = Ba = Ea$ . Si faccia poi ad  $Aa = Db = db$ . Col centro  $B$ ,





$2Bb \cdot AB = (NE)^2$ . Ma  $2Bb \cdot AB = 2(Ab)^2$  (§ 46). Dunque  $(Bb)^2 + 2Bb \cdot Ab + (Ab)^2 = (NE)^2$ . Ma  $(Bb)^2 + 2Bb \cdot Ab + (Ab)^2 = (AB)^2$ . Dunque  $(AB)^2 + (Ab)^2 = (NE)^2$ . Sarà dunque  $NE$  il lato del pentagono iscritto nel cerchio  $Bdd$  (§ 50) (10, lib. XIII); quindi essendo l'arco  $NE$  eguale a due decime della circonferenza, sarà l'arco  $BCN$  eguale a tre decime, e l'angolo  $BAN$  sarà l'angolo del pentagono regolare. Essendo poi la  $BN$  sottesa ai due lati  $BA$ ,  $AN$  del pentagono regolare; sarà essa il lato del triangolo isoscele, che ha per base  $AB$  e ciascuno degli angoli alla base duplo dell'angolo al vertice (11, lib. IV). Saranno dunque anche i punti  $L$  ed  $M$  vertici del pentagono regolare.

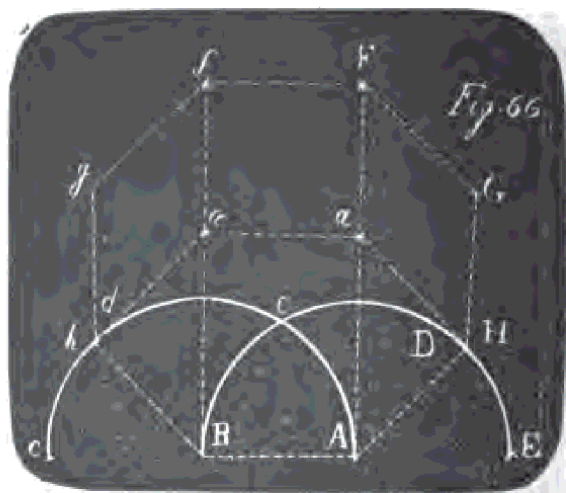
138. *Prob.* Sopra un dato lato  $AB$  costruire un esagono regolare (Fig. 65).

*Sol.* Col raggio  $AB$ , e coi centri  $A$  e  $B$  si segnino due archi, che si taglino in  $O$ . Collo stesso raggio, e col centro  $O$  si descriva un cerchio, e nella sua circonferenza si faccia ad  $AB=BC=CD=DE=EF$ . Sarà  $ABCDEF$  l'esagono regolare cercato.

Per la Dimostrazione vedi la 15, lib. IV.

139. *Prob.* Sopra un dato lato  $AB$  costruire un ottangolo regolare (Fig. 66).

*Sol. I.* Col raggio  $AB$ , e coi centri  $A$  e  $B$  si descrivano le due semicirconferenze  $BCDE$ ,  $ACde$  (§ 64). Si faccia a  $CE=Ca=Ba=Aa=ea$ . Col raggio  $AB$ , centro  $a$  si tagli l'arco  $DE$  in  $H$ . Collo stesso raggio, e centro  $\alpha$  si tagli l'arco  $d e$  in  $h$ . Collo stesso raggio, e coi centri  $H$  ed  $h$  si segnino due archi, che passino per  $G$  e  $g$ . Col





raggio  $Ba$ , e coi centri  $a$  ed  $\alpha$  si taglino questi archi in  $g$  e  $G$ . Col raggio  $AB$ , e coi centri  $G$  e  $g$  si segnino due archi, che passino per  $F$  ed  $f$ . Col raggio  $Aa$ , e coi centri  $a$  ed  $\alpha$  si taglino questi due archi in  $f$  ed  $F$ . Saranno i punti  $A, B, h, g, f, F, G, H$  i vertici dell'ottagono regolare costruito sul lato  $AB$ .

*Dim.* I lati  $AB, Bh, hg, gf, AH, HG, GF$  sono tutti eguali per costruzione. Ora se si consideri un ottagono regolare inscritto nel cerchio, si troverà, che ognuno dei suoi angoli alla circonferenza ha per base un arco eguale a sei ottavi di essa, e perciò è misurato da tre ottavi (20, lib. III). Si ha poi l'arco  $BCH$  eguali a tre ottavi (§ 30). Dunque l'angolo  $BAH$  è dell'ottagono. Istessamente lo è l'angolo  $ABh$ . Essendo poi le  $aA, \alpha B$  perpendicolari alla  $AB$  (§ 27), saranno parallele tra loro (29, lib. I). Dunque la  $Ha$ , che fa un angolo semiretto colla  $aA$  (§ 27), lo farà ancora colla  $\alpha B$  (27, lib. I); ma è semiretto anche  $hBa$ ; dunque  $aH$  è parallela ad  $hB$  (28, lib. I). Dunque anche  $ah$  è eguale e parallela alla  $HB$  (33, lib. I). Quindi l'angolo  $haH = hBH$  (34, lib. I). Ora l'angolo  $hBH = hBE - HBE = hBE - \frac{1}{2}HAE$  (20, lib. III). Avrà dunque per misura  $\frac{3}{8} - \frac{1}{16}$  della circonferenza, cioè  $\frac{5}{16}$  di essa: dunque l'angolo  $Bha$ , che insieme coll'angolo  $haH$  equivale a due retti (27, lib. I), avrà per misura  $\frac{3}{16}$  della circonferenza. Essendo poi nei due triangoli  $ahB, ahg$  tutti i lati eguali tra loro; sarà l'angolo  $ahg = ahB$  (8, lib. I). Quindi l'angolo totale  $ghB$  avrà per misura  $\frac{3}{8}$  della circonferenza, e sarà angolo dell'ottagono. Istessamente lo sarà l'angolo  $AHG$ . Sarà ancora l'angolo  $hga = hBa$ . Ed avendo parimente gli angoli eguali tra loro i due triangoli  $gfa, BAa$ ; sarà l'angolo  $fga = ABa$  (8, lib. I). Quindi l'angolo  $hgf$  sarà composto di due angoli eguali rispettivamente a due, che compongono l'angolo  $hBA$ . Gli sarà dunque eguale, e quindi sarà angolo dell'ottagono. Istessamente lo sarà l'angolo  $HGF$ . Saranno anche i punti  $f$  ed  $F$  vertici dell'ottagono come tutti gli altri.

*Sol. II.* Col raggio  $AB$ , e coi centri  $A$  e  $B$  descritte come sopra le due semicirconferenze  $BCDE, ACde$ , e fatto a  $CE = Ea = Ba = A\alpha = e\alpha$ ; di nuovo col raggio  $AB$ , e col centro  $a$  si segni un arco, che tagli l'arco  $DE$  in  $H$ , e passi per  $F$ . Collo



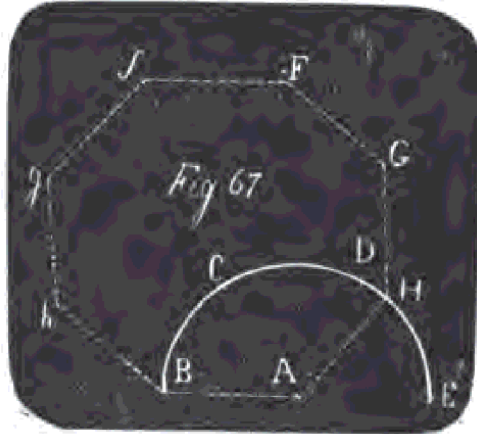
stesso raggio, centro  $\alpha$  si segni un arco, che tagli l'arco  $de$  in  $h$ , e passi per  $f$ . Col raggio  $aA$ , centro  $a$  si segni un arco, che passi per  $f$ . Collo stesso raggio, centro  $\alpha$  si segni un arco, che passi per  $F$ . Col raggio  $AB$ , e coi centri  $H$  ed  $F$ ;  $h$  ed  $f$  si segnino degli archi, che si taglino in  $G$ , e  $g$ .

*Dim.* Essendo per la dimostrazione della Soluzione I le  $AB$ ,  $\alpha\alpha$  parallele ed eguali tra loro, come le due  $aA$ ,  $\alpha B$ , che fanno con quelle angoli retti; posto per brevità  $AB=1$ ; sarà anche  $\alpha\alpha=\alpha f=aF=1$ . Si ha poi  $(Aa)^2=2=(af)^2=(\alpha F)^2$ . Quindi saranno retti gli angoli  $faa$ ,  $Faa$  (48, lib. I), e i punti  $f$ ,  $\alpha$ ,  $B$ , nella stessa retta (14, lib. I), e in una stessa parallela i punti  $F$ ,  $a$ ,  $A$ . Essendo poi anche eguali  $fa$ ,  $Fa$ , sarà  $fF$  parallela ed eguale alla  $\alpha a=1$ , ed  $Faaf$  un quadrato. Avendo poi i due triangoli  $FGa$ ,  $HGa$  i lati eguali tra loro, avranno eguali anche gli angoli (8, lib. I), e sarà l'angolo  $FGa=GaH$ ; quindi saranno parallele le due  $GH$ ,  $Fa$ , e quindi anche le due  $FG$ ,  $aH$  (33, lib. I). Ma l'angolo  $FaH$ , esterno al triangolo  $aHA$ , è eguale ai due opposti interni  $aHA$ ,  $aAH$  (32, lib. I), cioè a tre semiretti; è dunque l'angolo  $FaH=BAH$ ; dunque essendo eguali gli angoli opposti nei parallelogrammi (34, lib. I), anche  $FGH=BAH$ . Si ha poi l'angolo  $AaH=aHG$ , ed  $AHa$  è retto; dunque anche l'angolo  $AHG$  vale tre semiretti. Parimente l'angolo  $fFa$  essendo retto, ed  $aFG=aHG$  semiretto, sarà anche l'angolo  $fFG$  eguale a tre semiretti. Lo stesso si dimostra degli angoli in  $f$ ,  $g$  ed  $h$ . Essendo dunque tutti i lati e tutti gli angoli eguali, la Figura sarà un ottagono regolare.

Se si quadruplicano i due membri dell'equazione (§ 15)  $(QM)^2=(AQ)^2-(AM)^2$ , che appartiene alla Fig. 3, si avrà  $4(QM)^2=4(AQ)^2-4(AM)^2$ , cioè  $(Qq)^2=4(AQ)^2-(AB)^2$ ; onde ne viene per ogni rombo il teorema: *il quadrato d'una diagonale del rombo equivale a quattro quadrati d'uno de' suoi lati, sottrattone il quadrato dell'altra diagonale*. Quindi nel rombo  $FaHG$  si avrà  $(aG)^2=4(Fa)^2-(FH)^2$ . Ma essendo l'angolo  $FGH=HAB$ , e i lati, che comprendono quelli due angoli, eguali; risulta anche  $FH=BH$  (4, lib. I). Si avrà dunque  $(aG)^2=4(AB)^2-(BH)^2=(BE)^2-(BH)^2$ . Ma  $(BE)^2=(BH)^2+(HE)^2$  (31, lib. III, 47, lib. I). Dunque  $(aG)^2=(HE)^2$ , e quindi  $aG=HE$ .

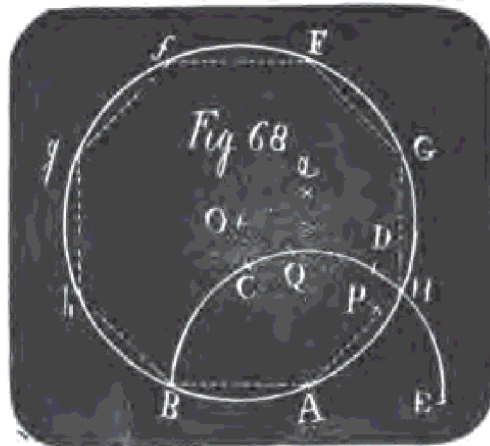
*Sol. III.* Col raggio  $AB$ , e col centro  $A$  descritta la semi-

circonferenza  $BCDE$  (§ 64) (fig. 67), e fatto a  $BD=Ba=Ea$ ; col raggio  $AB$ , centro  $a$  si segni un arco, che tagli l'arco  $DE$  in  $H$ , e passi per  $F$ . Col raggio  $aA$ , centro  $a$  si segni un arco, che passi per  $f$ . Col raggio  $aB$ , centro  $a$  si segni un arco, che passi per  $g$ . Col raggio  $BH$ , centro  $a$  si segni un arco, che passi per  $h$ . Col raggio  $HE$ , centro  $a$  si segni un arco, che passi per  $G$ . Si faccia ad  $AB=Bh=hg=gf=fF=FG$ . Sarà anche  $FG=GH$ , ecc.



*Dim.* I triangoli  $aAB$ ,  $aBh$ ,  $ahg$ ,  $agf$ , ecc. che hanno il vertice in  $a$  e le basi sui lati della Figura, hanno tutti i loro lati eguali rispettivamente ai lati dei triangoli delle stesse lettere nella Figura 66. (Vedi le due dimostrazioni antecedenti). Dunque avranno anche gli angoli eguali (8, lib. I). Ed essendo similmente posti per ordine; anche gli angoli della Figura, che sono composti degli angoli di questi triangoli presi a due a due, saranno eguali agli angoli dell'altra Figura. Dunque ecc.

*Sol. IV.* Col raggio  $AB$ , e col centro  $A$  (fig. 68) descritta la semicirconferenza  $BCDE$  col fare in essa ad  $AB=BC=CD=DE$ , e fatto a  $BD=Ba=Ea$ , e col raggio  $AB$ , centro  $a$  avendo tagliata la semicirconferenza in  $H$ , col raggio  $EH$ , e coi centri  $E$  ed  $A$  si segnino due archi, che si taglino in  $P$ . Collo stesso raggio  $PA$ , centro  $P$  si tagli la semicirconferenza in  $Q$ . Col raggio  $BQ$ , e coi centri  $B$  ed  $H$  si segnino due archi, che si taglino in  $O$ . Ora col centro  $O$ , e collo stesso raggio  $OH$  si descriva un cerchio, che passerà per  $A$ . Nella sua circonferenza si faccia ad  $AB=Bh=$

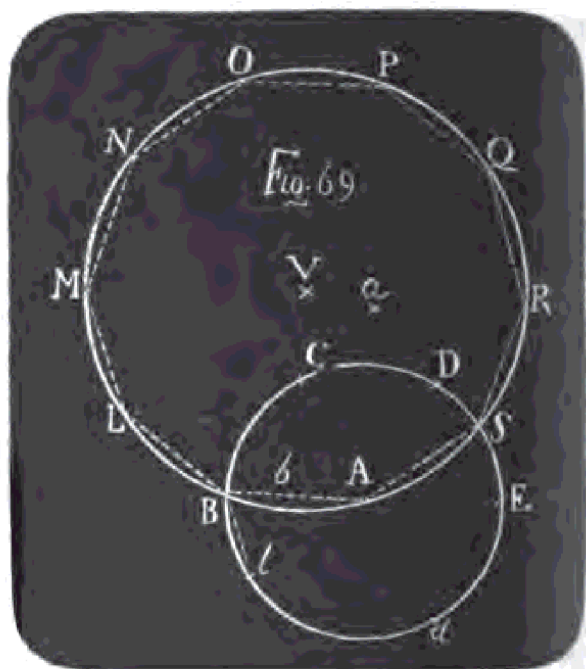


$hg=gf=fF=FG$ . Saranno i punti  $A, B, h, g, f$ , ecc. i vertici dell'ottagono.

*Dim.* Essendo  $QP=AP=EP$ , così pure  $QA=AE=AB$ , e la  $AB$  sulla continuazione della  $AE$  (15, lib. VI), si avrà (§ 22)  $BQ \cdot AP=(AQ)^2$ . Quindi  $AP:AQ::AQ:BQ$  (17, lib. VI), ossia  $HE:AE::AB:BO$ . Ma  $HE$  è un lato dell'ottagono inscritto al cerchio di raggio  $AE$ . Dunque anche  $AB$  sarà lato dell'ottagono inscritto al cerchio di raggio  $BO$ .

140. *Prob.* Sopra un dato lato  $AB$  costruire un decagono regolare (Fig. 69).

*Sol.* Col centro  $A$ , e col raggio  $AB$  si descriva il cerchio  $BDd$ . Si faccia nella sua circonferenza ad  $AB=BC=CD=DE=Ed$ . Si faccia a  $BD=Ba=Ea$ . Si faccia poi ad  $Aa=Db=db$ . Ora col raggio  $bE$ , e coi centri  $A$  e  $B$  si descrivano due archi che si taglino in  $V$ . Collo stesso raggio  $bE$ , e col centro  $V$  si descriva il cerchio  $BLMNOPQ$ , e si faccia ad  $AB=BL=LM=MN=$



$NO=OP=PQ=QR=RS$ . Il punto  $S$  sarà nella sezione delle due circonferenze e si avranno nei punti  $A, B, L, M$ , ecc. i dieci vertici del decagono regolare cercato.

*Dim.* La  $bE$  è un lato del triangolo isoscele, che avendo per base la  $AB$ , ha gli angoli alla base ciascuno doppio dell'angolo al vertice (§ 137). Dunque nel triangolo  $VAB$  sarà l'angolo  $BVA$  eguale a un quinto di due retti (32, lib. I). Sarà dunque l'arco  $BA$ , che lo misura, eguale ad un decimo della circonferenza, come lo saranno gli altri archi  $BL, LM, MN$ , ecc. Sarà dunque il poligono  $ABLMNOPQRS$  un decagono regolare inscritto al cerchio di centro  $V$  e costruito sul lato  $AB$ .

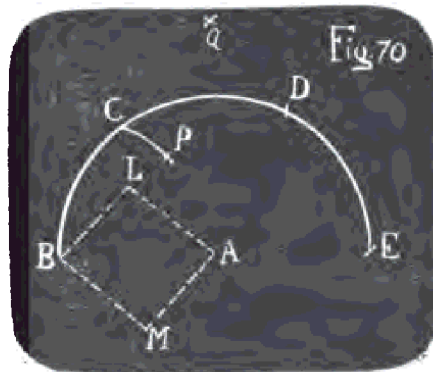
141. *Prob.* Sopra un lato dato  $AB$  costruire un poligono regolare (fig. 69) qualunque tra quelli, che si possono inscrivere al cerchio (§ 128).

*Sol.* Col raggio  $AB$  si descriva un cerchio  $BDd$ . In esso si iscriva un poligono regolare simile a quello, che si vuole costruire sul lato  $AB$ , cioè di un egual numero di lati (§ 128); e sia  $Bl$  un lato di questo poligono inscritto. A questo lato  $Bl$  e al raggio  $AB$  si trovi la terza proportionale (§§ 87, 89, 90, 91, 92). Con essa presa per raggio, e coi centri  $A$  e  $B$  si segnino due archi, che si taglino in  $V$ . Collo stesso raggio  $VA$ , centro  $V$  si descriva un cerchio  $ABLMN$ , ecc., e si faccia ad  $AB=BL=LM=MN$  ecc. I punti  $A, B, L, M, N$ , ecc. saranno i vertici del poligono cercato.

*Dim.* Avendo il triangolo  $BAl$  i lati proporzionali ai lati del triangolo  $BVA$ , sarà l'angolo  $BAl=BVA$  (5, lib. VI). Dunque gli archi  $Bl, BA$ , che li misurano, saranno porzioni eguali delle loro circonferenze. Dunque ecc.

142. *Prob.* Costruire (fig. 70) un quadrato intorno ad una data diagonale  $AB$ .

*Sol.* Col raggio  $AB$ , centro  $A$  si descriva l'arco  $BCDE$ . Collo stesso raggio, e col centro  $B$  si descriva l'arco indefinito  $CP$ , e si faccia a  $BC=CD=DE$ . Si faccia poi a  $BD=Ba=Ea$ . Ora col raggio  $Aa$ , e col centro  $E$  si tagli l'arco  $CP$  in  $P$ . Col raggio  $AP$ , e coi centri  $A$  e  $B$  si segnino due archi, che si taglino in  $L$  ed  $M$ . Sarà  $ALBM$  il quadrato cercato.



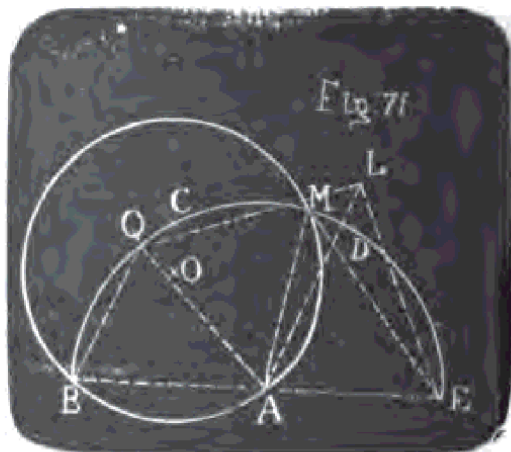
*Dim.* Se si supponga per brevità  $AB=1$ , sarà  $AP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  (§ 104)  $= AL=BL$ . Quindi  $(AL)^2=(BL)^2=\frac{1}{2}$ , ed  $(AL)^2+(BL)^2=1=(AB)^2$ . Dunque l'angolo  $BLA$  è retto (48, lib. I), e semi-retti i due angoli eguali tra loro  $LBA, LAB$  (5 e 32, lib. I). Istessamente si dimostrerà essere retto l'angolo  $BMA$ , e semi-retti gli angoli  $MBA, MAB$ . Dunque saranno retti gli angoli  $MBL, MAL$  ed  $ALBM$  sarà il quadrato cercato.

## LIBRO DECIMO

## DEI CENTRI

143. Trovare (fig. 71 il centro d'un cerchio dato  $MAB$ .

*Sol.* Fatto centro in qualche punto  $A$  della sua circonferenza, con uno raggio arbitrario  $AB$ , che riesca minore del diametro del cerchio dato, e maggiore del suo quarto, si descriva la semicirconferenza  $BCDE$  facendo ad  $AB = BC = CD = DE$ . Sia  $M$  il punto dove questa taglia la circonferenza del cerchio dato. Col



raggio  $EM$ , e coi centri  $E$  ed  $A$  si segnino due archi, che si taglino in  $L$ . Collo stesso raggio  $LA$ , e col centro  $L$  si tagli il cerchio  $BME$  in  $Q$ . Col raggio  $BQ$ , e coi centri  $B$  ed  $A$  si segnino due archi, che si taglino in  $O$ . Sarà  $O$  il centro cercato.

*Dim.* Essendo la  $BAE$  una retta (15, lib. IV), l'angolo esterno  $LAB$  è eguale ai due interni opposti  $ALE$ ,  $AEL$  presi insieme nel triangolo  $ALE$  (32, lib. I). Ora i triangoli  $LAE$ ,  $LAQ$  hanno tutti i lati eguali fra loro; quindi hanno eguali gli angoli opposti ai lati eguali (8, lib. I). È dunque l'angolo  $AEL = QAL$  ed  $ALE = ALQ$ . Dunque l'angolo  $LAB$  è eguale ai due presi insieme  $QAL$  e  $QLA$ . E tolto via da tutte due le parti l'angolo  $QAL$ , resta l'angolo  $QAB = QLA$ . Sarà dunque nel triangolo  $LAQ$  la somma degli altri due angoli  $LAQ$ ,  $LQA$  eguale alla somma dei due angoli  $AQB$ ,  $ABQ$  nel triangolo  $ABQ$  (32, lib. I). Ma questi due triangoli  $LAQ$ ,  $ABQ$  sono isosceli per costruzione; dunque gli angoli alla loro base saranno eguali alla semisomma (5, lib. I), e però eguali nell'uno e nell'altro triangolo tra loro. Saranno dunque i triangoli  $LAQ$ ,  $ABQ$  simili (4, lib. VI), e sarà  $LA$  ad  $AQ$ , come  $AQ$  a  $QB$ . E sostituendo valori eguali, sarà  $ME$  ad  $EA$ , come  $AB$  ad  $OB$ . Dun-



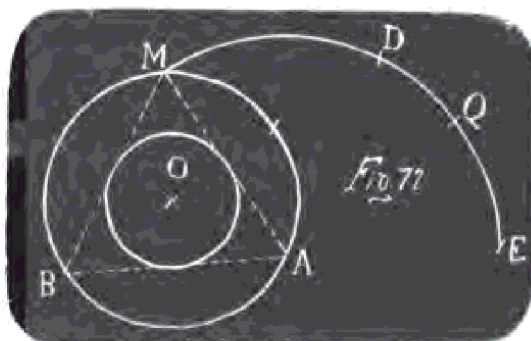
que i triangoli isosceli  $MAE$ ,  $AOB$ , avendo i lati proporzionali, sono equiangoli tra loro (5, lib. VI), ed è l'angolo  $OAB=AME=AEM$ . Ma l'angolo  $MAB$  esterno è eguale ai due interni, eguali tra loro, presi insieme  $AME$ ,  $AEM$  nel triangolo  $AEM$  (32, lib. I.). Dunque sarà eguale all'angolo  $OAB$  preso due volte; ossia sarà  $OAB=OAM$ . Ma sono ancora nei due triangoli  $OAB$ ,  $OAM$  eguali tra loro i lati  $AB$ ,  $AM$ , ed il lato  $OA$  è comune; cioè i due triangoli hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali; dunque (4, lib. I) sarà anche il terzo lato  $OB$  d'un triangolo eguale al terzo lato  $OM$  dell'altro. Dunque le tre  $OB$ ,  $OA$ ,  $OM$  sono eguali, e però  $O$  è il centro, che si cercava del circolo  $MAB$  (9, lib. III).

144. Qualora s'è trovato il valore della  $QB$  terza proporzionale alle due  $LA$ ,  $AQ$ , ossia alle due  $EM$ ,  $EA$ , che è il valore del raggio del cerchio, di cui si cerca il centro, basterà prendere due punti ad arbitrio nella circonferenza del cerchio, e fatto centro in essi, con questo raggio segnare due archi, che si taglino. La loro sezione sarà il centro del cerchio.

145. Sarà utile in pratica, per ottenere sezioni ad angoli meno acuti, scegliere ad occhio un raggio  $AB$ , che s'accosti al valore del raggio del cerchio che si cerca.

146. *Prob.* Ad un triangolo equilatero (fig. 72) dato circoscrivere ed inscrivere un cerchio.

*Sol.* Siano i vertici del triangolo dato  $A$ ,  $B$  ed  $M$ . Col raggio  $AM$ , e col centro  $A$  si segni l'arco  $MDE$ , e si faccia ad  $AM=MD=DE$ . Col raggio



$BD$  e coi centri  $B$  ed  $A$  si segnino due archi, che si taglino in  $L$ . Collo stesso raggio  $LA$ , e col centro  $L$  si tagli l'arco  $DE$  in  $Q$ . Col raggio  $QE$ , e con due vertici del triangolo, per esempio  $A$  e  $B$ , presi per centri si segnino due archi, che si taglino in  $O$ . Collo stesso raggio  $OA$ , e col centro  $O$  si descriva un cerchio. Esso sarà circoscritto al triangolo.

Si divida per metà la  $QE$  in  $m$  (§ 66). Col raggio  $Qm$  e collo stesso centro  $O$  si descriva un altro cerchio. Esso sarà inscritto al triangolo.



*Dim.* Dalla dimostrazione del § 143 risulta essere anche qui la  $QE$  terza proporzionale alle due  $EM, EA$ , essendo anche qui la  $BAE$  una retta. Sarà dunque la  $QE$  raggio d'un cerchio, che passa pei tre punti  $M, A, B$ ; e sarà  $O$  il centro (§ 144).

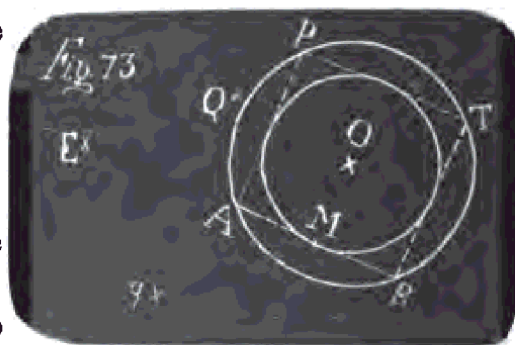
Nella figura 59, nella quale il cerchio  $DBd$  è inscritto al triangolo  $NLM$ , avendosi la  $AD$  perpendicolare ad  $LD$ , e la  $NAB$  ad  $LB$  (§ 131), i triangoli rettangoli  $NDA, NBL$ , che hanno un angolo comune in  $N$ , hanno anche il terzo angolo eguale (32, lib. I); quindi si ha la proporzione (4, lib. VI)  $NL : LB :: NA : DA$ . Ma  $NL$  è doppia di  $LB$ ; dunque anche  $NA$  è doppia di  $DA$ , cioè il raggio del cerchio circoscritto al triangolo equilatero è doppio del raggio del cerchio inscritto. Dunque ecc.

147. *Prob.* Ad un quadrato dato circoscrivere ed inscrivere un cerchio (fig. 73).

*Sol.* Sieno i quattro vertici dati del quadrato  $A, B, T, P$ . Si faccia ad  $AB=AE$ . Ad  $PB=PE$ . Collo stesso raggio  $BP$ , e col centro  $B$  si segni un arco, che passi per  $Q$  e  $q$ . Col centro  $E$ , e col raggio  $EA$  si tagli quest'arco in  $Q$  e  $q$ . Collo stesso raggio  $AE$ , e coi centri  $Q$  e  $q$  si segnino due archi, che si taglino in  $M$ . Col raggio  $AQ$ , e coi centri  $A$  e  $B$  si segnino due archi, che si taglino in  $O$ . Collo stesso raggio  $OB$ , e col centro  $O$  si descriva un cerchio. Esso sarà circoscritto al quadrato. Collo stesso centro  $O$ , e col raggio  $OM$  si descriva un altro cerchio. Esso sarà inscritto al quadrato.

*Dim.* Se per brevità si suppone  $AB=1$ , si avrà  $AQ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$  (§ 104)  $=AO=BO$ . Sarà dunque  $(AO)^2+(BO)^2=1=(AB)^2$ . Quindi sarà retto l'angolo  $BOA$  (48, lib. I), e semiretti gli angoli  $OAB, OBA$  (5 e 32, lib. I). Essendo poi retto l'angolo  $BAP$  del quadrato, sarà semiretto l'angolo  $OAP$ . Dunque nei due triangoli  $BAO, PAO$  si avrà un angolo eguale compreso fra lati eguali tra loro. Quindi sarà anche  $OB=OP$  (4, lib. I). Nella stessa maniera si dimostra essere anche  $OB=OT$ . Dunque il cerchio  $ABTP$  è circoscritto al quadrato.

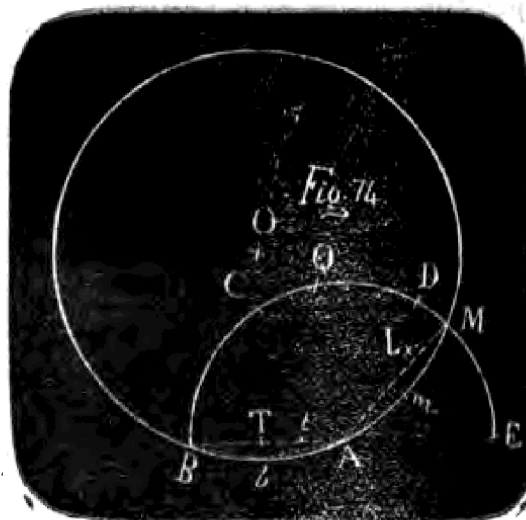
La  $OM$  è perpendicolare alla  $MA$  (§ 83). Dunque la  $BMA$



è tangente al cerchio descritto col raggio  $OM$ . Lo stesso si dimostra degli altri lati  $AP$ ,  $PT$ ,  $TB$ . Dunque il cerchio descritto col raggio  $OM$ , e col centro  $O$  è inscritto al quadrato.

148. *Prob.* Ad un qualunque poligono regolare (fig. 74) circoscrivere e inscrivere un cerchio.

Sieno  $B$ ,  $A$ ,  $M$  tre vertici di questo poligono regolare, dei quali quello di mezzo  $A$  sia egualmente lontano dagli altri due  $B$  ed  $M$ . Fatto centro in  $A$ , col raggio  $AB$  si descriva la semicirconferenza  $BCDE$  (§ 64). Col raggio  $ME$ , e coi centri  $A$  ed  $E$  si segnino



due archi, che si taglino in  $L$ . Col centro  $L$  e collo stesso raggio  $LA$  si tagli la semicirconferenza  $BCDE$  in  $Q$ . La  $BQ$  sarà il raggio del cerchio circoscritto. E però presi per centri due vertici del poligono, per esempio  $B$  ed  $A$ , e col raggio  $BQ$  segnati due archi, che si taglino in  $O$ ; sarà  $O$  il centro.

Se  $AB$  è un lato del poligono, si divida per metà in  $T$  (§ 66). Sarà  $OT$  il raggio del cerchio inscritto, che si descriverà col medesimo centro  $O$ . Se fosse qualunque altro  $Ab$  uno de' lati del poligono, si divida per metà  $Ab$  in  $t$ . Sarà  $Ot$  il raggio del cerchio da inscrivere col medesimo centro.

*Dim.* Che  $O$  sia il centro del cerchio, che passa pei tre punti  $B$ ,  $A$ ,  $M$ , risulta dalla dimostrazione del § 14. Dunque è centro del cerchio circoscritto, poichè pei tre punti  $B$ ,  $A$ ,  $M$  non si può far passare che un cerchio (25, lib. III).

È poi  $OT$  perpendicolare alla  $TA$  (§ 83). Quindi la  $TA$  sarà tangente al cerchio descritto col raggio  $OT$ , e col centro  $O$  (16, lib. I). Lo stesso si dimostra di tutti gli altri lati eguali ad  $AB$ . Dunque questo cerchio è inscritto al poligono, che ha per lato  $AB$ . Istessamente si dimostra, che il cerchio descritto col raggio  $Ot$ , e col centro  $O$  è inscritto al poligono, che ha per lato  $Ab$ .

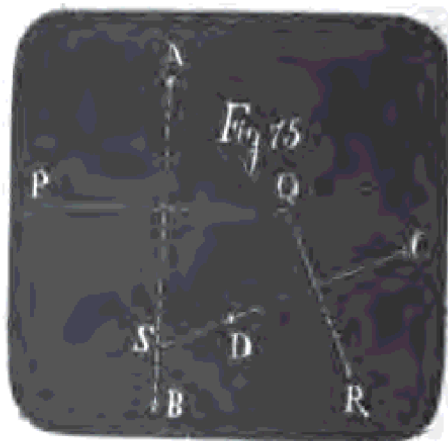
149. Se  $AB$  è lato del poligono, nel quale si vuole inscrivere

il cerchio, ci saranno molte maniere di dividerlo per metà (§ 66). Pel quadrato abbiamo assegnato la più semplice (§ 147). Pel triangolo solo (§ 146) il raggio del cerchio inscritto è la metà del raggio del circoscritto. Nel solo quadrato è eguale alla metà del lato.

150. *Prob.* Trovare il centro  $S$  d'un cerchio (fig. 75), che passi per tre punti dati  $PQR$ .

*Sol.* Fatto centro in  $P$  e  $Q$ , con un raggio arbitrario si segnano due archi, che si tagliano in  $A$  e  $B$ . Fatto centro in  $Q$  ed  $R$ , si segnano pure con un raggio arbitrario due archi, che si tagliano in  $C$  e  $D$ . Si trovi il punto  $S$ , dove le due  $AB$ ,  $CD$  si tagliano (§ 112). Sarà  $S$  il centro cercato.

*Dim.* Vedi la 25, lib. III.



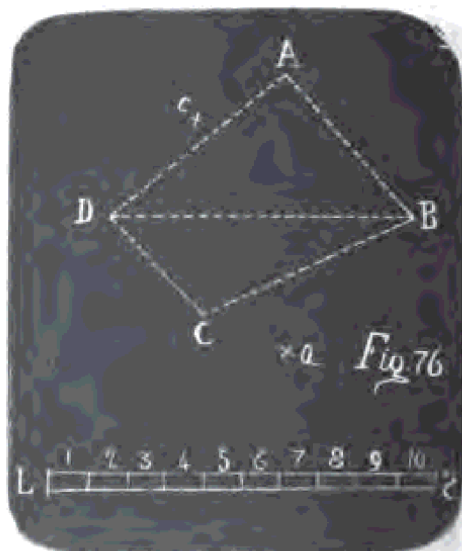
## LIBRO UNDECIMO

### PROBLEMI VARI

151. *Prob.* Data una scala  $LS$ , trovare l'area del campo triangolare  $ABD$ , e del campo quadrilatero  $ABCD$  (fig. 76).

*Sol.* Si faccia a  $AB = Ba$ ; a  $DA = Da$  (§ 11). Si portino sulla scala  $LS$  le distanze  $Aa$  e  $BD$  prese sul compasso, e si trovi essere per esempio  $Aa = 7$ ,  $BD = 8$ . Si moltiplichino tra loro questi due numeri, e si pigli il quarto del prodotto  $= 14$ . Questo numero esprimerà l'area del triangolo  $ABD$ .

Se si voglia l'area del campo quadrilatero  $ABCD$ , trovato,



come qui sopra, il punto  $a$ , si faccia a  $BC=Bc$ , a  $DC=Dc$ . Si trovino sulla scala le due distanze  $Aa$ ,  $Cc$ , e sia per esempio  $Aa=7$ ,  $Cc=5$ . Per la loro somma  $=12$  si moltiplichi la  $BD$  trovata sulla scala per esempio  $=8$ . Del prodotto  $96$  si pigli la quarta parte  $24$ . Questo numero esprimerà l'area del quadrilatero  $ABCD$ .

*Dim.* La  $Aa$  è doppia della perpendicolare, che da  $A$  cade sopra la  $BD$  (§ 14). Ma l'area del triangolo  $ABD$  è eguale alla metà dell'area d'un parallelogrammo, che ha per base la  $BD$ , e per altezza questa perpendicolare (41, lib. I). Dunque è eguale alla quarta parte del prodotto della  $Aa$  nella  $BD$ . Egualmente l'area del triangolo  $BCD$  è eguale alla quarta parte del prodotto della  $Cc$  nella  $BD$ . Dunque l'area del quadrilatero  $ABCD$  è eguale alla quarta parte del prodotto della somma delle due parallele  $Aa$ ,  $Cc$  nella loro perpendicolare  $BD$ .

152. Può servire questo problema a misurare l'area di tutto un disegno di un campo poligono, ripartendolo in tanti quadrilateri e triangoli coll'immaginarvi delle linee rette. Si potrebbero proporre anche altre maniere di ridurlo in trapezj, ma queste si possono, quando giovi, raccogliere facilmente dal metodo, col quale si è sciolto questo problema.

153. *Prob.* Dati i piani triangolari (fig. 77), che contengono una piramide tetraedra, trovare nella sua base il punto, nel quale cade la perpendicolare dal vertice, e trovare la sua altezza.

*Sol.* Sia il triangolo  $ABC$  la base di questa piramide tetraedra, e sieno  $AEC$ ,  $BDC$ ,  $AFB$  i piani triangolari, che vanno al suo vertice.

Col centro  $C$  e col raggio  $CD = CE$  si descriva un arco, che passi per  $e$  e  $d$ .

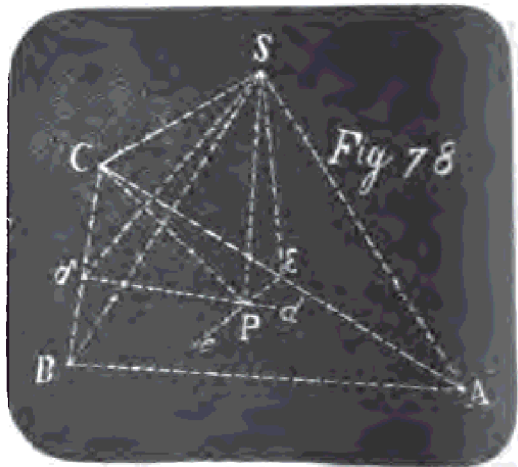


Col centro  $B$  e col raggio  $BD$  si descriva un arco, che tagli il primo in  $d$ . Col centro  $A$  e col raggio  $AE$  si segni un arco, che tagli il primo in  $e$ .

Si trovi il punto  $P$ , dove si tagliano le due rette  $Dd$ ,  $Ee$  (§ 11). Sarà questo il punto, dove cade la perpendicolare dal vertice della piramide.

Si divida per metà la  $CE$  in  $m$  (§ 66). Col raggio  $mC$ , centro  $m$  si descriva la semicirconferenza  $CpE$ . Si faccia a  $CP = Cp$ . Sarà  $Ep$  l'altezza della piramide.

*Dim.* Se nella piramide  $SABC$ , (fig. 78) che ha per base il triangolo  $ABC$  e per vertice  $S$ , si guidi nel triangolo  $SCB$  la retta  $S\delta$  perpendicolare a  $CB$ , e nel piano della base  $ACB$  dal punto  $\delta$  si alzi la perpendicolare  $\delta d$ ; sarà in essa il punto  $P$ , in cui cade la perpendicolare  $SP$  dal vertice (11, lib. XI). Istessamente se dal punto  $S$  nel piano  $SAC$  si guidi ad  $AC$  la perpendicolare  $S\varepsilon$ , e da  $\varepsilon$  nel piano della base  $ACB$  si guidi la perpendicolare  $\varepsilon e$  alla stessa  $AC$ ; sarà in essa il punto  $P$ . Sarà dunque questo la sezione delle due rette  $\delta d$ ,  $\varepsilon e$ . Ma nella Figura 77, nella quale i punti  $D$  ed  $E$  rappresentano il punto  $S$  della Figura 78, la  $Dd$  è perpendicolare alla  $BC$  in un punto  $\delta$  (§ 14); così pure la  $Ee$  è perpendicolare alla  $AC$  in un punto  $\varepsilon$ . Dunque il punto  $P$  è il cercato.



Essendo poi i due triangoli  $CP S$ , (fig. 78,)  $Cp E$  (fig. 77) rettangoli in  $P$  e  $p$  il primo per supposizione e il secondo per la 31, lib. III, ed essendo  $CS$  la stessa  $CE$  e la  $CP = Cp$ ; sarà ancora  $PS = pE$ . Poichè (Fig. 78)  $(CS)^2 - (CP)^2 = (PS)^2$  (47, lib. I). Egualmente (Fig. 77)  $(CE)^2 - (Cp)^2 = (pE)^2$ . Ma  $(CS)^2 - (CP)^2 = (CE)^2 - (Cp)^2$ . Dunque  $(PS)^2 = (pE)^2$ . Quindi  $PS = pE$ . È dunque  $pE$  l'altezza della piramide.

154. Fin qui nelle Dimostrazioni non ci siamo dipartiti dagli Elementi di Euclide. Ma poichè in seguito ciò non si potrebbe

più fare ogni volta senza troppa prolissità; porremo qui in sussidio alcune equazioni, che si trovano dimostrate in tutti i trattati di Trigonometria Piana.

155. Se in un cerchio descritto col raggio = 1 sieno  $x$  ed  $y$  due archi qualunque; si avrà:

$$\text{sen } (x + y) = \text{sen } x \cdot \cos y + \cos x \cdot \text{sen } y,$$

$$\text{sen } (x - y) = \text{sen } x \cdot \cos y - \cos x \cdot \text{sen } y,$$

$$\cos (x + y) = \cos x \cdot \cos y - \text{sen } x \cdot \text{sen } y,$$

$$\cos (x - y) = \cos x \cdot \cos y + \text{sen } x \cdot \text{sen } y.$$

156. Se nella terza di queste equazioni si ponga  $x = y$ ; si avrà:

$$\cos 2x = (\cos x)^2 - (\text{sen } x)^2.$$

E poichè  $(\cos x)^2 + (\text{sen } x)^2 = 1$ , e quindi  $(\cos x)^2 = 1 - (\text{sen } x)^2$ ; ne verrà  $\cos 2x = 1 - 2 (\text{sen } x)^2$  e quindi  $(\text{sen } x)^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ; e finalmente  $\text{sen } x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$ .

157. Se si sommano la prima e la seconda delle equazioni del § 155, ne verrà

$$\text{sen } (x + y) + \text{sen } (x - y) = 2 \text{ sen } x \cdot \cos y,$$

e quindi

$$\text{sen } x \cdot \cos y = \frac{\text{sen } (x + y) + \text{sen } (x - y)}{2}.$$

Se si faccia  $x + y = p$ ;  $x - y = q$ ; si avrà  $2x = p + q$ ; quindi  $\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{ sen } \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$ .

158. Se si sommano la terza e la quarta delle equazioni del § 155, ne verrà

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos (x + y) + \cos (x - y)}{2},$$

e quindi  $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ .

159. Se si sottrae la terza dalla quarta delle predette equazioni, ne verrà

$$\text{sen } x \cdot \text{sen } y = \frac{\cos (x - y) - \cos (x + y)}{2},$$

e quindi  $\cos q - \cos p = 2 \text{ sen } \frac{p+q}{2} \cdot \text{sen } \frac{p-q}{2}$ .



160. Essendo  $2 \operatorname{sen} x = \text{corda } 2x$ ; sarà (§ 156)  $\text{corda } 2x = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$ ; e posto  $x$  in luogo di  $2x$ , si avrà

$$\text{corda } x = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{2 - 2 \cos x}.$$

Se si chiami  $k$  la corda,  $c$  il coseno,  $s$  il seno,  $h$  la corda del complemento al quadrante; si avrà

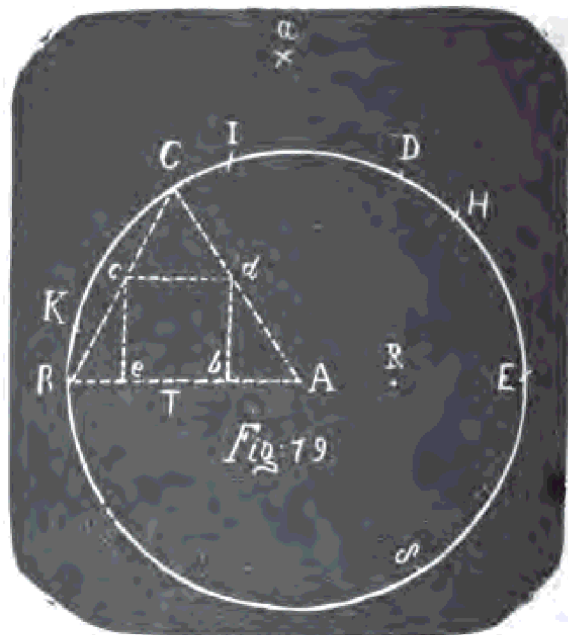
$$k^2 = 2 - 2c, \quad h^2 = 2 - 2s.$$

Dalla prima di queste due equazioni si avrà  $c = 1 - \frac{1}{2} k^2$ , ed essendo  $s = \sqrt{1 - c^2} = \sqrt{k^2 - \frac{1}{4} k^4} = k \sqrt{1 - \frac{1}{4} k^2}$ ; si avrà  $h^2 = 2 - 2k \sqrt{1 - \frac{1}{4} k^2}$ .

161. *Prob.* In un dato triangolo equilatero  $ABC$  (fig. 79) inscrivere un quadrato  $becd$  (§ 124).

*Sol. I.* Se vorremo servirci dei lati dati del triangolo, col centro  $A$  e col raggio  $AB$  si descriva il semicerchio  $BCDE$  (§ 64).

Col centro  $E$ , col raggio  $EC$  si descriva un arco, che tagli il dato lato  $AB$  in  $e$ . Col centro  $A$ , e col raggio  $Be$  si descriva un arco, che tagli lo stesso lato in  $b$ . Coi centri  $b$  e  $e$  e col raggio  $eb$  si descrivano due archi, che taglino



i lati  $AC$  in  $d$  e  $CB$  in  $c$ . Sarà  $becd$  il quadrato iscritto.

*Dim.* Posto per brevità  $AB=1$ , sarà  $Ee = EC = BD = \sqrt{3}$  (§ 2); quindi  $Be = BE - Ee = 2 - \sqrt{3} = Ab$ ; quindi  $be = AB - 2Ab = 2\sqrt{3} - 3 = (2 - \sqrt{3})\sqrt{3} = ec$ . Sarà dunque  $Be : ec :: (2 - \sqrt{3}) : (2 - \sqrt{3})\sqrt{3} :: 1 : \sqrt{3}$ .

Ma se si suppone che la  $AB$  sia tagliata per metà in  $T$  dalla perpendicolare  $CT$ ; sarà pure  $BT : TC :: \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3}$  (§ 104); cioè  $BT : TC :: 1 : \sqrt{3}$ . Dunque la  $ec$  è parallela alla  $TC$  (2,

lib. VI), e quindi perpendicolare alla  $AB$  (27, lib. I). Lo stesso si dimostrerà della  $db$ . Dunque  $becd$  è il quadrato inscritto.

*Sol. II.* Se poi non ci volessimo servire della intersezione dei lati dati del triangolo  $ABC$ ; ma solamente dati i tre punti estremi  $A$ ,  $B$  e  $C$  del triangolo si dovessero trovare i quattro punti  $b$ ,  $e$ ,  $c$ ,  $d$  del quadrato da inserirsi;

Col centro  $E$ , come prima, e col raggio  $EC$  si segni un arco, che passi per  $e$ ,  $C$  ed  $a$ . Collo stesso raggio, e col centro  $B$  si segni un arco, che tagli l'antecedente in  $a$ .

Col raggio  $AB$ , e col centro  $a$  si tagli la semicirconferenza  $BCDE$  in  $H$ . Si faccia in essa ad  $Ha=HI=IK$ .

Col raggio  $aK$ , e col centro  $D$  si descriva un arco, che passi per  $e$ . Sarà determinato il punto  $e$ .

Col raggio  $Be$ , e col centro  $A$  si guidi un arco per  $b$ . Col raggio  $Ce$ , e col centro  $C$  si guidi un altro arco, che tagli l'ultimo in  $b$ . Col raggio  $be$ , e coi centri  $b$  e  $C$  si segnino due archi, che si taglino in  $d$ . Collo stesso raggio  $be$ , e coi centri  $e$  e  $C$  si segnino due archi, che si taglino in  $c$ . Sarà  $becd$  il quadrato cercato.

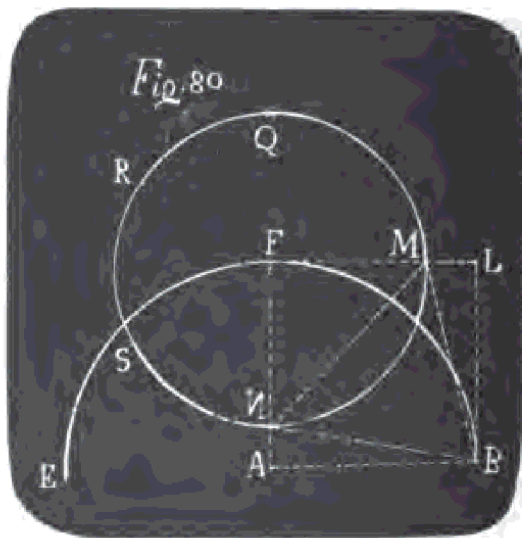
Ovvero compito il cerchio  $BCDE\delta$ , e fatto ad  $AB=E\delta$ ; col raggio  $aK$  determinato come qui sopra, e coi centri  $D$  e  $\delta$  si descrivano due archi, che si taglino in  $e$ . Il resto si faccia come sopra.

*Dim.* Il punto  $K$  si sarà qui determinato come nella figura 9 (§ 32) per via del medesimo punto  $a$ , sicchè l'arco  $BK$  sarà una ventiquattresima parte della circonferenza. Ora nella figura 9 essendo  $BK=Bk=EM$ ; se si confrontino i punti  $a$ ,  $K$ ,  $B$ ,  $k$ ,  $A$ ,  $M$  coi punti  $Q$ ,  $A$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $p$ ,  $B$  della figura 4; dall'equazione  $(AQ)^2=(RQ)^2-AS \cdot pQ$  (§ 20) risulterà per la figura 9 l'equazione  $(aK)^2=(Ba)^2-Kk \cdot Aa$ . Ora  $Kk$  è corda d'una dodicesima parte della circonferenza. Per trovare il suo valore, supponendo per brevità  $AB=1$ , si ha il seno di  $BN=Kk=AX$  (fig. 12)  $=\frac{1}{2}$ , e il doppio del suo coseno, cioè  $2NX=NO=BD=\sqrt{3}$ : quindi se nell'equazione (§ 160) corda  $x=\sqrt{2-2\cos x}$  in luogo di  $x$  si costituisce l'arco  $Kk$ , e in luogo di  $2\cos x$ ,  $\sqrt{3}$ , si avrà la retta  $Kk=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$ . Quindi  $(aK)^2=3-(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}) \cdot \sqrt{2}$  (§ 27)  $=3-(\sqrt{3}-1)=4-\sqrt{3}$ . Ora

se coi centri  $D$  e  $\delta$ , e col raggio  $aK$  si segnino due archi, che si taglino in  $e$ , sarà il punto  $e$  sulla retta  $BE$  (§ 13), che dividerà in due egualmente la  $D\delta$  al punto  $R$  ad angoli retti (§ 14), facendo  $RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  (§ 104). Essendo dunque  $(De)^2 = (DR)^2 + (eB)^2$  (47, lib. I); sarà  $(eR)^2 = (De)^2 - (DR)^2 = 4 - \sqrt{3} - \frac{3}{4} = \frac{13 - 4\sqrt{3}}{4}$  e quindi  $eR = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$  e  $eE = \sqrt{3}$ . Dunque per la dimostrazione della Soluzione I il punto  $e$  è uno degli estremi del quadrato. Sarà poi lo stesso, se si trovi coi centri  $D$  ed  $E$ , e coi due raggi  $aK$  e  $BD$ , come nella prima parte di questa Soluzione II. Avendo poi eguali i lati tra loro i due triangoli  $CAb$ ,  $CBe$ , sarà l'angolo  $CBe = CAb$  (8, lib. I)  $= CBA$ . Quindi il punto  $b$  sarà sulla  $BA$ , e sarà un altro estremo del quadrato. Finalmente essendo in questa Soluzione le rette  $Cb$ ,  $Ce$  le stesse di posizione e di grandezza, che nella Soluzione prima, ed essendo anche nella prima Soluzione  $Cd = bd$ ,  $Cc = ec$  a cagione del triangolo equilatero  $Ccd$  pel parallelismo della  $cd$  alla  $BA$  (2, lib. VI); saranno anche i punti  $d$  e  $c$  determinati in questa Soluzione come nella prima.

162. *Prob.* Nel quadrato  $ABLF$  inscrivere un triangolo equilatero (fig. 80), che ha un angolo  $B$  ad un angolo del quadrato.

*Sol. I.* Col centro  $A$  e col raggio  $AB$  si descriva la semicirconferenza  $BFE$ , facendo ad  $FB = FE$ ; si faccia pure a  $BE = BQ = EQ$ . Se ci vogliamo servire delle sezioni dei lati dati del quadrato; col centro  $F$  e col raggio  $FQ$  si descriva un arco, che tagli due lati del quadrato nei punti  $M$  ed  $N$ , saranno i punti  $B$ ,  $M$ ,  $N$  gli estremi del triangolo cercato.



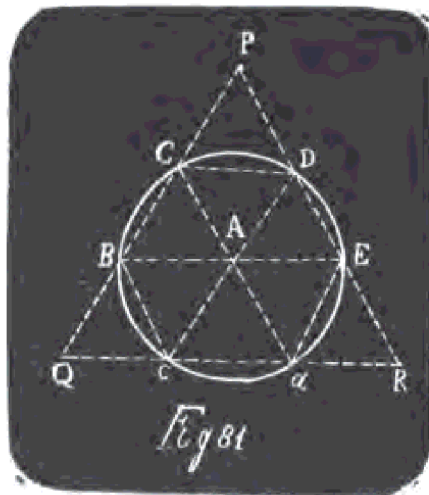
*Dim.* Essendo retto l'angolo  $QAB$  (§ 83); sarà  $(BQ)^2 = (AB)^2 + (AQ)^2$  (47, lib. I), e preso per brevità  $AB=1$ ; si avrà  $4=1+(AQ)^2$ ; quindi  $AQ=\sqrt{3}$ ;  $FQ=AQ-AF=\sqrt{3}-1=FM=FN$ . Quindi  $(FM)^2=(FN)^2=4-2\sqrt{3}$ , e però  $(MN)^2=(FM)^2+(FN)^2=8-4\sqrt{3}$ . Essendo poi  $LM=LF-FM=1-(\sqrt{3}-1)=2-\sqrt{3}$ ; sarà  $(LM)^2=7-4\sqrt{3}$ . Quindi  $(BM)^2=(BL)^2+(LM)^2=8-4\sqrt{3}=(MN)^2$ . Istessamente si dimostra essere  $(BN)^2=(MN)^2$ . Dunque  $BM=MN=BN$ .

*Sol. II.* Se non si suppongano dati, che i quattro estremi del quadrato  $A, B, L, F$ ; trovato come nella Soluzione I il punto  $Q$ , col centro  $F$ , e col raggio  $FQ$  si descriva la circonferenza  $QRSNM$ , e fatto ad  $FQ=QR=RS=SN$ , col centro  $B$ , e col raggio  $BN$  si tagli questa circonferenza nel punto  $M$ . Saranno i punti  $B, N, M$  gli estremi del triangolo cercato.

*Dim.* L'arco  $QRSN$  è la metà della circonferenza (15, lib. 4). Dunque il punto  $N$  è nella retta  $QFA$ , ed è egualmente distante da  $F$ , che nella Soluzione I; dunque è lo stesso. Il punto  $M$  anche nella Soluzione I si trova nella sezione di due archi descritti coi centri  $F$  ed  $B$ , e coi raggi eguali ad  $FQ$  ed a  $BN$  come in questa; dunque è lo stesso. Dunque ecc.

163. *Prob.* In un triangolo equilatero, di cui sono dati i vertici (fig. 81)  $P, Q, R$ , inscrivere un esagono regolare.

*Sol.* Si divida la distanza  $QR$  in tre parti eguali nei punti  $c$  e  $d$  (§ 68). Coi centri  $c$  e  $d$ , e col raggio  $cd$  si segnino due archi, che si taglino in  $A$ . Collo stesso raggio, e col centro  $A$  si descriva un cerchio, e si faccia nella sua circonferenza  $a dc=cB=BC=CD=DE$ . Saranno i punti  $B, C, D, E, d, c$  i vertici dell'esagono inscritto.

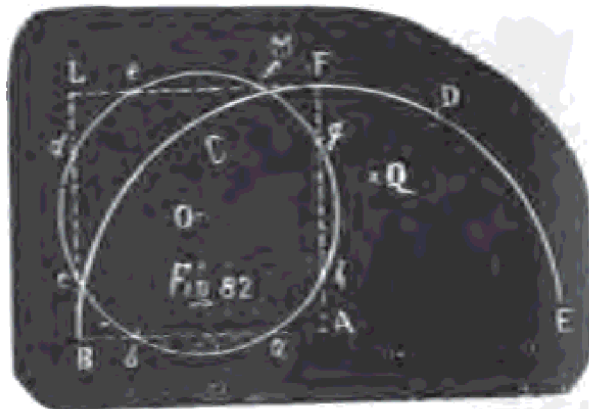


*Dim.* Il triangolo  $BcQ$  ha i lati  $Bc, Qc$  eguali ai lati  $Ad, cd$  del triangolo  $Adc$ , e l'angolo compreso eguale pel parallelismo delle due  $Bc, Ad$  (27, lib. I). Dunque gli è eguale in tutto (4, lib. I), e l'angolo  $cQB=dcA=cQP$ . Dunque il punto  $B$  è

sulla  $PQ$ . Istessamente si dimostra, che gli altri punti  $C, D, E$  sono sui lati del triangolo proposto. Dunque ecc.

164. *Prob.* In un dato quadrato (fig. 82)  $ABLF$  inscrivere un ottagono regolare.

*Sol. I.* Se ci vogliamo servire dell' intersezione dei lati dati del quadrato, col centro  $A$ , e col raggio  $AB$  si descriva la semicirconferenza  $BCDE$ , facendo ad  $AB=BC=CD=DE$ . Si faccia a  $BF=BQ$ , ad  $EA=EQ$ . Col



raggio  $AQ$  e col centro  $A$  si taglino due lati in  $b$  e  $g$ . Collo stesso raggio, e coi centri  $B, L$  ed  $F$  si taglino in seguito i lati nei punti  $a, d, c, f, e, h$ . Saranno questi i vertici dell' ottagono  $abcdefgh$ .

*Sol. II.* Trovato come nella Soluzione I il punto  $Q$ ; col raggio  $AQ$ , e coi centri  $A$  e  $B$  si segnino due archi, che si taglino in  $O$ . Collo stesso raggio, e col centro  $A$  si tagli il lato  $AB$  in  $b$ . Col centro  $O$ , e col raggio  $Ob$  si descriva un cerchio, che tagli i lati del quadrato negli altri punti  $c, d, e, f, g, h, a$ . Saranno essi i vertici dell' ottagono.

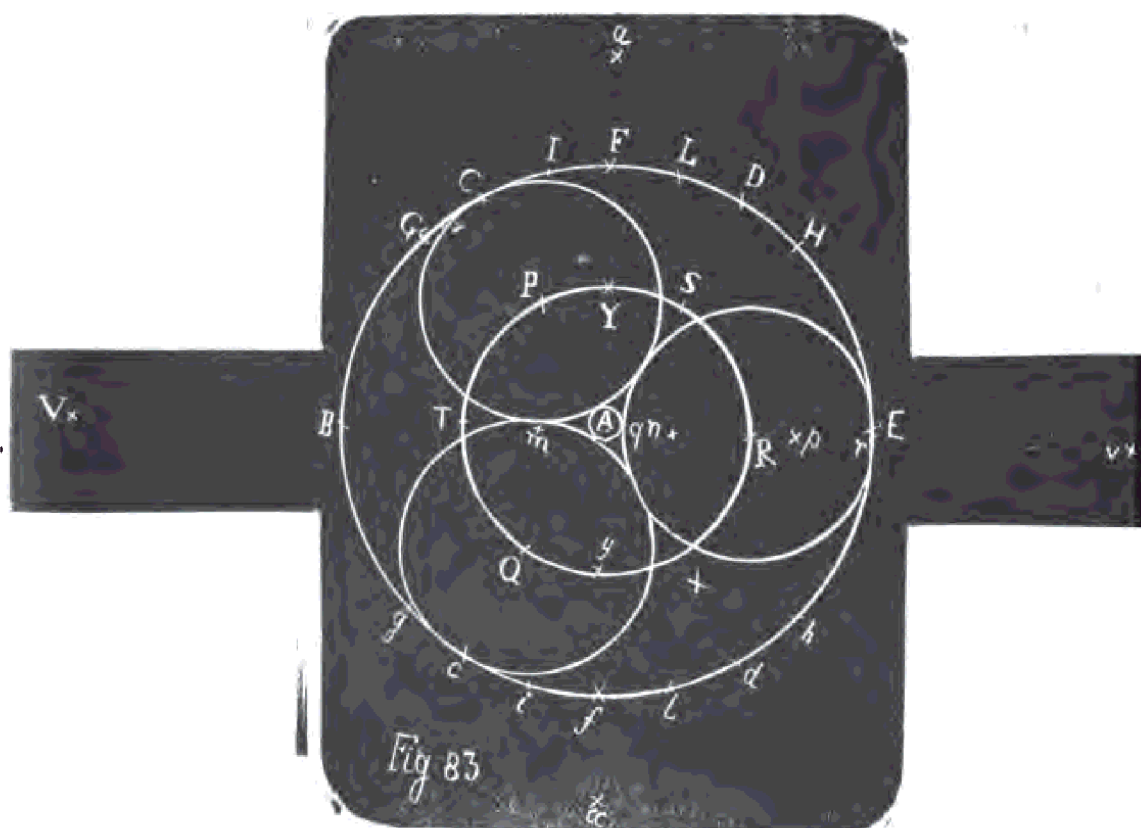
*Sol. III.* Se non fossero dati i lati del quadrato, ma solo i quattro i vertici  $A, B, L, F$ ; trovato come nella Soluzione I il punto  $Q$ , si faccia ad  $EC=EM$ , a  $BF=BM$ . Col raggio  $AM$ , e col centro  $A$  si descriva un arco, che passi per  $e, d$ . Collo stesso raggio, e col centro  $B$  si descriva un arco, che passi per  $f, g$ . Collo stesso raggio, e col centro  $L$  si descriva un arco, che passi per  $h, a$ . Collo stesso raggio, e col centro  $F$  si descriva un arco, che passi per  $b, c$ . Col raggio  $AQ$  e coi centri  $A, B, L, F$  si taglino questi archi nei punti  $b, g, d, a, c, f, e, h$ . Questi saranno i vertici dell' ottagono.

*Dim.* Supposto per brevità, che sia  $AB=1$ ; sarà  $AM=\frac{1}{2}\sqrt{6}$  (§ 104);  $AQ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ . Sarà dunque  $(Ad)^2=(AM)^2=\frac{3}{4}=1+\frac{1}{4}=(AB)^2+(Bd)^2$ , per essere  $(Bd)^2=(AQ)^2=\frac{1}{4}$ . Sarà dunque retto l' angolo  $ABd$  (48. lib. I), e però il punto  $d$  sarà nella  $BL$ .



Istessamente si dimostrerà, che tutti gli altri punti sono nei lati del quadrato proposto. Si avrà poi  $Ld = BL - Bd = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = Le$ , e  $(de)^2 = (Ld)^2 + (Le)^2$  (47, lib. I)  $= 2(Ld)^2$ , e quindi  $de = Ld \times \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$ . Ma si ha  $cd = BL - Ld - Bc = BL - 2Ld = 1 - 2 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$ .

Dunque  $cd = de$ . Istessamente si dimostrerà, che sono eguali tra loro tutti i lati dell'ottagono. Essendo poi eguali tra loro in tutto i triangoli  $Lde$ ,  $Bbc$ ,  $Aah$ ,  $Ffg$  (4, lib. I); saranno eguali i loro angoli ai punti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ; quindi saranno eguali anche i loro supplementi ai due retti, cioè gli angoli dell'ottagono (13, lib. I).



165. *Prob.* Dato un ottagono regolare (fig. 66)  $ABhgfEGH$ , trovare facilmente: 1° il lato d'un ottagono regolare doppio di area; 2° il lato d'un ottagono triplo.

*Sol.* Col lato  $AB$  dell'ottagono dato preso per raggio fatto in  $F$  ed  $H$  si descrivano due archi, che si taglino in  $a$ .

centro



Sarà: 1°  $af$ , ovvero  $aA$  il lato dell'ottagono doppio; 2°  $AB$ , ovvero  $ag$  il lato dell'ottagono triplo.

*Dim.* Se si supponga essere  $AB = 1$ , sarà  $aA = af = \sqrt{2}$  (§ 139);  $aB = ag = \sqrt{3}$  (§ 2). Ma le aree delle figure simili sono in ragione duplicata dei lati omologhi (20, lib. VI). Dunque sarà  $aA$  lato d'un ottagono doppio, ed  $aB$  d'un triplo.

166. *Prob.* In un cerchio di raggio dato  $AB$  (Fig. 83) inscrivere tre cerchj, che lo tocchino, e si tocchino tra loro.

*Sol.* Nella circonferenza del cerchio dato si faccia ad  $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$ . Col raggio  $BD$ , e col centro  $B$  si descriva un arco, che passi per  $a$ ,  $p$ , ed  $\alpha$ . Collo stesso raggio  $BD$ , e col centro  $E$  si tagli quest'arco in  $a$  ed  $\alpha$ . Collo stesso raggio, e coi centri  $C$ ,  $c$  si descrivano due archi; che si taglino in  $V$ ; e coi centri  $D$  e  $d$  due altri archi, che si taglino in  $v$ . Collo stesso raggio, e coi centri  $V$ ,  $v$  si descrivano due archi, che passino per  $m$  ed  $n$ . Col raggio  $AB$ , e coi centri  $a$  ed  $\alpha$  si tagli la circonferenza del cerchio dato in  $G$ ,  $H$ , ed in  $g$ ,  $h$ . Si faccia in essa circonferenza allo stesso raggio  $AB = GL = HI = gl = hi$ . Si faccia ad  $Aa = BF$ , ad  $IL = LY = IY = ly = iy$ . Ad  $Yy = Fm = Fn$ . A  $Dn = Dp$ . Col centro  $A$ , e col raggio  $mn$  si descriva il cerchio  $PSRXQT$ , e preso nella sua circonferenza un punto arbitrario  $P$ , si faccia a  $PA = PS = SR = RX = XQ = QT$ . Finalmente coi centri  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , e col raggio  $pn$  si descrivano tre cerchj. Saranno questi i cercati.

*Dim.* Essendo la  $IL$  corda d'una duodecima parte della circonferenza (§ 32), sarà  $IL = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$  (§ 160). Ed essendo il quadrato del diametro  $(Li)^2 = (IL)^2 + (Ii)^2$  (47, lib. I, 31 lib. III); si avrà  $4 = 2 - \sqrt{3} + (Ii)^2$ ; quindi  $(Ii)^2 = 2 + \sqrt{3}$ , ed  $Ii = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ . Si avrà poi (§ 20)  $(aI)^2 = (aB)^2 - Ii$ .  $Aa = 3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 3 - (1 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$ . Quindi  $aI = IL = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ . Per le stesse ragioni sarà  $aL = LI$ ; quindi sarà  $aIYL$  un rombo, e si avrà  $(aY)^2 = 4(aI)^2 - (IL)^2 = 3(IL)^2$  (§ 139). Quindi  $aY = IL \cdot \sqrt{3}$ . Ma essendo i punti  $I$  ed  $L$  egualmente lontani da  $A$ ; saranno i tre punti  $a$ ,  $Y$ ,  $A$  nella stessa retta (§ 13). Quindi  $AY = Aa - aY = \sqrt{2} - \sqrt{6 - 3\sqrt{3}} = \sqrt{2} - (3\sqrt{1/2} - \sqrt{3/2}) = \sqrt{3/2} - \sqrt{1/2} = IL$ . Lo stesso si dimostrerà della

*Ay.* Essendo poi il punto  $y$  nella  $aa$  cioè nella  $aA$  (§ 13); sarà  $Yy=2AY$ . Ora i punti  $V, B, A, E, v$  sono nella stessa retta (§ 13). Se si supponga per un momento, che nella stessa retta sieno i punti  $m, n$ ; sarà  $Am=AV-Vm=2-\sqrt{3}$ . Poichè se si confrontino i punti  $C, c, V, B, A, E$  punti  $A, B, Q, P, p; q$  della Fig. 3, si avrà in questa Figura 83,  $VB=AE$  (§ 14), e quindi  $AV=2$ . È poi  $Vm=\sqrt{3}$ . Istessamente si dimostrerà essere  $An=2-\sqrt{3}$ . Quindi sarà  $(Fm)^2=(Am)^2+(AF)^2$  (47, lib. I)  $=7-4\sqrt{3}+1=4(2-\sqrt{3})$ . Quindi  $Fm=2\sqrt{2-\sqrt{3}}=2AY$ . Si è poi

preso nella costruzione della Figura  $Fm=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ . Dunque il punto  $m$  sarà nella retta  $VA$ . Lo stesso si dimostra del punto  $n$ . Dunque essendo perciò  $Am=2-\sqrt{3}$ ; sarà  $mn=4-2\sqrt{3}$ . Avendo poi i triangoli  $BpD, v n D$  i lati eguali tra loro; sarà l'angolo  $Dvn=DBp$  (8, lib. I). Ma l'angolo  $Dvn$ , che è lo stesso coll'angolo  $DvB$ , essendo eguale all'angolo  $DBV$  (5, lib. I), si avrà l'angolo  $DBp=DBv$ . Dunque il punto  $p$  è nella retta  $AE$ . Si ha poi  $Dn=Dp$ , e istessamente si dimostra  $dn=dp$ . Dunque confrontando i punti  $D, d, A, n, p, E$  di questa Figura coi punti  $A, B, Q, P, p, q$  della Figura 3, si troverà in questa Fig. 83 essere  $pE=An=2-\sqrt{3}$ . Quindi  $pn=AE-2An=1-4+2\sqrt{3}=2\sqrt{3}-3$ . Essendo poi il triangolo equilatero  $PQR$  simile al triangolo equilatero  $Bdd$ , e quindi anche il triangolo  $ABD$  simile al triangolo  $APR$  (20, lib. VI); sarà  $AB:BD::AP:PR$ . Cioè  $1:\sqrt{3}::4-2\sqrt{3}:PR$ . Quindi  $PR=4\sqrt{3}-6=2pn$ . Tagliata dunque per metà la  $PR$  in  $p$ , sarà il punto  $p$  egualmente nelle due circonferenze dei cerchi descritti coi centri  $P$  ed  $R$ , e sarà  $p$  il punto di contatto (12, lib. III). Si aggiunga ora alla retta  $AR=mn=4-2\sqrt{3}$  il raggio del cerchio descritto col centro  $R$ , ossia la retta  $Rr=np=2\sqrt{3}-3$ ; si avrà  $Ar=4-3=1=AB$ . Dunque il punto  $r$  sarà egualmente nelle due circonferenze, e il cerchio descritto col centro  $R$  toccherà internamente il cerchio dato (11, libro III). Lo stesso si dimostrerà degli altri. Dunque ecc.

167. Questo Problema viene sciolto elegantemente da Tommaso Simpson *Select. Exercises Ecc. Geometrical Problems*, Prob. 13, col cerchio e colla riga. Dalla nostra costruzione apparisce potersi scogliere ancora più brevemente colla riga e col com-

passo, di quello che fa il Simpson, se condotta la retta  $Vav$ , e fatto in essa ad  $AB=BV=Ev$ , si faccia a  $BD=Vm=Bv=vm$ , col centro  $A$ , e col raggio  $mn$  si descriva il cerchio  $PQR$ , e si faccia il restante come nella Soluzione antecedente.

168. *Prob.* Col centro  $A$  (fig. 83) descrivere un cerchio, che



tocchi esteriormente i tre cerchi inscritti per il Problema antecedente (§ 166) ad un cerchio dato.

*Sol.* Si cerchi una terza proporzionale alle due  $AB$ ,  $Am$  (§ 86). Con essa presa per raggio, e col centro  $A$  si descriva un cerchio. Sarà esso il cercato.

*Dim.* Essendo  $AB=1$ ;  $Am = 2 - \sqrt{3}$ , sarà la terza propor-

zionale  $= 7 - 4\sqrt{3}$ . Pra se dal raggio  $Ar=1$  si sottragga il diametro  $qr$  del cerchio descritto col centro  $R$ , cioè se si sottragga  $2np=4\sqrt{3}-6$ ; si avrà appunto  $7-4\sqrt{3}$ . Dunque un cerchio descritto col centro  $A$ , e con quella terza proporzionale toccherà questo cerchio inscritto nel punto  $q$  (12, lib. III), e toccherà ancora gli altri due cerchj).

169. *Prob.* In un cerchio di raggio dato  $AB$  (fig. 84) inscrivere quattro cerchj, che siano tangenti di esso e tra loro.

*Sol.* Si faccia nella circonferenza del dato cerchio ad  $AB=BC=CD=DE$ . Quindi a  $BD=Ba=Ea$ ; quindi ad  $Aa=BF=Bf$ ; quindi ad  $AB=FN=FO$ ; quindi a  $BD=NP=OP$ . Col centro  $A$ , e col raggio  $aP$  si descriva il cerchio  $QRST$ . Preso un punto arbitrario  $Q$  sulla sua circonferenza, si faccia in essa a  $BQ=FR=ES=fT$ . Coi centri  $Q, R, S, T$ , e col raggio  $aF$  si descrivano quattro cerchj. Essi saranno i cercati.

*Dim.* Essendo  $BF=FE=Ef=fB$  (§ 27); sarà ancora  $QR=RS=ST=TQ$  (§ 93). Sarà dunque retto l'angolo  $TAQ$ . Dunque  $(TQ)^2 = (AT)^2 + (AQ)^2 = 2(AT)^2$ . Preso poi  $AB=1$ ; sarà anche  $FP=1$  (§ 166); quindi  $AP=2$ . Sarà pure  $Aa=\sqrt{2}$  (§ 27); quindi  $aP=2-\sqrt{2}$ ;  $aF=\sqrt{2}-1$ . Quindi  $2(AT)^2 = 2(aP)^2 = (TQ)^2 = 2(2-\sqrt{2})^2$ , e  $TQ=(2-\sqrt{2})\sqrt{2}=2\sqrt{2}-2=2(\sqrt{2}-1)=2aF$ .

Dunque la distanza dei due centri  $T$  e  $Q$  è uguale alla somma dei raggi dei due cerchj descritti con questi centri. Quindi essi si toccano alla metà della  $TQ$  in  $p$ . Lo stesso si proverà di due altri qualunque. Sia poi  $r$  il punto, dove la  $AR$  continuata taglia il cerchio descritto col centro  $R$ ; sarà  $Ar=AR+Rr=aP+aF=PF=1=AB$ . Dunque il punto  $r$  sarà nella circonferenza del cerchio dato. Quindi la  $Ar$  passando pei due centri  $A$  ed  $R$  sarà perpendicolare alla tangente d'entrambi al punto  $r$ ; quindi essi si toccheranno tra loro (13 e 16, lib. III). Lo stesso si dimostra degli altri.

170. *Prob.* Col centro  $A$  (fig. 84) descrivere un cerchio, che tocchi i quattro ultimamente inscritti (§ 169) in un cerchio dato.

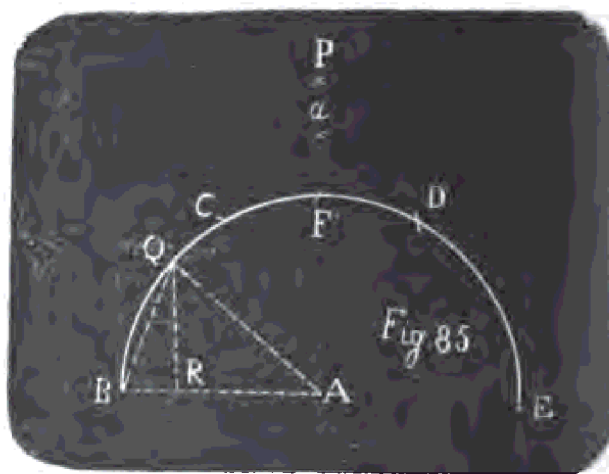
*Sol.* Si trovi una terza proporzionale alle due rette  $FP, Fa$  (§ 86). Con essa presa per raggio, e col centro  $A$  si descriva un cerchio. Esso sarà il cercato.

*Dim.* Essendo  $PF=1$ ,  $Fa=\sqrt{2}-1$ , sarà la terza propor-

zionale eguale a  $3-2\sqrt{2}$ . Ora sia  $q$  il punto, dove il raggio  $Ar$  taglia il cerchio descritto col centro  $R$ . Sarà  $qr$  diametro di esso cerchio  $=2aF=2\sqrt{2}-2$ ; il qual valore sottratto da  $1=Ar$ , lascerà  $Aq=3-2\sqrt{2}$  eguale a quella terza proporzionale. Dunque il punto  $q$  sarà nelle due circonferenze; ed essendo nella retta  $AR$ , la perpendicolare ad essa retta in  $q$  sarà tangente ai due cerchi, i quali si toccheranno in  $q$  (13 e 16, libro III). Lo stesso si dimostrerà per gli altri.

171. *Prob.* Trovare un arco di cerchio, che abbia il coseno eguale alla corda (Fig. 85).

*Sol.* Con un raggio  $AB$  supposto  $=1$  sia descritto l'arco  $BCDE$ , e si faccia ad  $AB=BC=CD=DE=DP=CP$ . Quindi si faccia a  $BD=Ba=Ea$ . Quindi ad  $Aa=BF$ . Col raggio  $PF$ , e col centro  $B$  si segni un arco che tagli l'arco  $BC$  in  $Q$ . Sarà l'arco  $BQ$  il cercato



*Dim.* I punti  $A, F, a, P$  sono nella stessa retta (§ 13). I punti poi  $B, A, D, P$  essendo lontani dal punto  $C$  per la distanza  $CB$  sono nella circonferenza d'un cerchio, che si descrive col centro  $C$ , raggio  $CB$ . Inoltre essendo a  $CB=BA=AD=DP$ , sarà  $BCP$  diametro di questo cerchio (15, lib. VI) e  $PA=\sqrt{3}$  (§ 2). Quindi  $PF=\sqrt{3}-1=BQ$ . Se ora si cala  $QR$  perpendicolare sopra  $AB$ , si avrà  $(BQ)^2=(AB)^2+(AQ)^2-2AB \cdot AR$  (13, lib. II); cioè  $(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}=2-2AR$ , e quindi  $AR=\sqrt{3}-1=BQ$ , come si era proposto di fare.

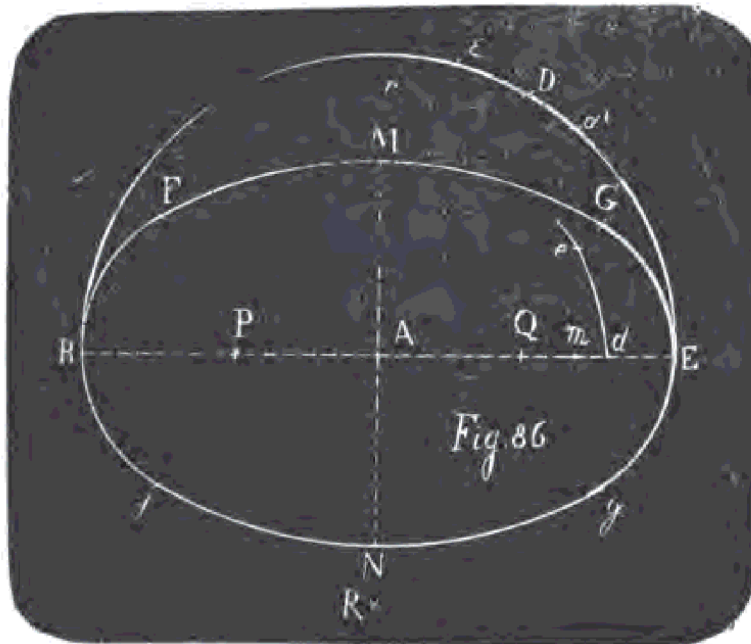
Questi ultimi Problemi sono dell' Ozanam sciolti da esso colla riga e col compasso.

172. *Prob.* Dati gli assi  $BE, MN$  (fig. 86) d'una elisse, descrivere intorno ad essi un'ovale composta di quattro archi di cerchio, che siano tangenti tra loro.

*Soluz.* Col centro  $A$ , dove si tagliano gli assi, e col raggio  $AB$ , che è il semi-asse maggiore, si descriva la semi-



circonferenza  $BDE$ , e si faccia ad  $EA=ED$ . Col centro  $B$ , e col raggio  $BD$  si tagli l'asse  $BA$  in  $d$ . Col centro  $A$ , e col raggio  $AM$  si tagli il semi-asse  $AE$  in  $m$ . Collo stesso centro  $A$ , e col raggio  $Ad$  si descriva l'arco  $de$ , e si faccia ad  $Em=de$ . Con un raggio arbitrario, e coi centri  $d$  ed  $e$  si tagli l'arco  $BDE$  in  $\delta$  ed  $\epsilon$ . Col raggio  $\delta\epsilon$ , e col centro  $A$  si ta-



gli l'asse  $BE$  in  $P$  e  $Q$ . Coi centri  $P$  e  $Q$ , e col raggio  $PB=QE$  si descrivano gli archi  $FBf$ ,  $GEg$ , e si faccia a  $PB=BF=Bf=EG=Eg$ . Quindi si faccia a  $PQ=PR=Pr=QR=Qr$ . Quindi col centro  $R$ , e col raggio  $RF$  si descriva l'arco  $FG$ , che passerà per  $M$ . Collo stesso raggio  $RF=rf$ , e col centro  $r$  si descriva l'arco  $fg$ , che passerà per  $N$ , e sarà fatto quanto volevasi.

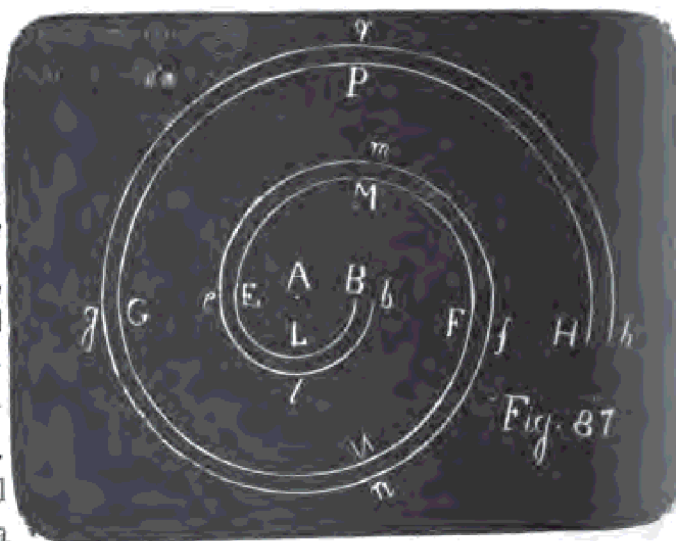
*Dim.* Essendo equilateri i triangoli  $BFP$   $PQR$ , saranno eguali gli angoli  $BPF$ ,  $QPR$  (8, lib. I); quindi le due  $FP$ ,  $PR$  formeranno una sola retta, perchè i due angoli  $FPA + APR$  sono eguali ai due  $FPA + FPB$  (13 e 14, lib. I). Dunque i due archi  $BF$ ,  $FG$  si toccheranno l'un l'altro in  $F$  (13, lib. III). Lo stesso contatto si dimostra ai punti  $f$ ,  $G$ ,  $g$ . Se poi si supponga per brevità  $AB=1$ , sarà  $BD=\sqrt{3}$  (§ 2)= $Bd$ ; quindi  $Ad=\sqrt{3}-1$ . Essendo poi  $Ad:de::A\delta:\delta\epsilon$  (§ 93), sarà ancora, moltiplicando tutti due i termini della prima ragione per  $\sqrt{3}+1$  (4, lib. V),  $Ad(\sqrt{3}+1):de(\sqrt{3}+1)::A\delta:\delta\epsilon$ , e sostituendo i valori numerici di  $Ad$  ed  $A\delta$ , ed eseguendo la moltiplicazione nel primo termine, si avrà  $2:de(\sqrt{3}+1)::1:\delta\epsilon$ . Quindi  $2\delta\epsilon=2AP=de(\sqrt{3}+1)=PQ=PR$ . Essendo poi  $PRQr$  un rombo, si avrà



(§ 139)  $(Rr)^2 = 4(PR)^1 - (PQ)^2 = 3(PR)^2$ . Quindi  $Rr = PR \cdot \sqrt{3} = de(3 + \sqrt{3})$ , ed  $RA = \frac{1}{2} de(3 + \sqrt{3})$ . Si ha poi  $AM = Am = AE - Em = AE - de = 1 - de$ . Quindi  $RA + AM = 1 + \frac{1}{2} de(1 + \sqrt{3})$ , ossia  $RM = 1 + \frac{1}{2} PR$ . Essendo poi  $PF = PB = 1 - AP = 1 - \frac{1}{2} PR$ , si avrà  $PF + PR = 1 + \frac{1}{2} PR$ , cioè  $FR = RM$ . Dunque l'arco  $FG$  passerà per  $M$ . Istessamente si mostrerà che l'arco  $fg$  passerà per  $N$ . Dunque ecc.

173. *Prob.* Descrivere (fig. 87) una spirale  $BLEMFNGPH$  composta di più archi di cerchio.

*Sol.* Sia  $BE = BF$  la distanza, che si vuol dare alle rivoluzioni di questa spirale. Divisa la  $BE$  per metà in  $A$  (§ 66), col centro  $A$ , e col raggio  $AB$  si descriva la semicirconfenza  $BLE$  (§ 64). Col centro  $B$ , e col raggio  $BE$  si descriva la semicirconfenza



$EMF$ . Di nuovo col centro  $A$ , e col raggio  $AF$  si descriva la semicirconfenza  $FNG$ . Di nuovo col centro  $B$ , e col raggio  $BG$  si descriva la semicirconfenza  $GPH$ . Nella stessa maniera si potrebbe proseguire questa spirale indefinitamente.

Si potrà allo stesso modo duplicare questa spirale, se preso il punto  $b$  ad una distanza qual si vuole da  $B$  sulla  $AB$  (§ 73), coi centri  $A$  e  $b$  a vicenda si descriveranno le semicirconfenze  $ble$ ,  $emf$ ,  $fng$ ,  $gph$ , ecc.

Questo Problema non ha bisogno di dimostrazione.

174. *Prob.* Trovare  $\sqrt{\sqrt{2}}$  e  $\sqrt{\sqrt{3}}$ .

*Sol.* Col raggio  $AB = 1$ , e col centro  $A$  (fig. 88) si descriva la semicirconfenza  $BCDE$ , facendo ad  $AB = BC = CD = DE$ . Quindi si faccia a  $BD = Ba = Ea$ . Quindi ad  $Aa = BP$ ; ad  $AB = EP$ . Sulla semicirconfenza si notino i punti  $H, I, K$ , facendo alla stessa  $AB = aH = HI = IK$ .

Col raggio  $AP$ , e coi centri  $E$  ed  $H$  si segnino due archi, che si taglino in  $L$  ed  $M$ . Sarà  $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$ .

Col raggio  $AB$ , e coi centri  $a$  e  $K$  si segnino due archi, che si taglino in  $Q$  ed  $R$ . Sarà  $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$ .

*Dim.* Essendo  $ELHM$  un rombo, sarà (§ 139)  $(LM)^2 = 4(LH)^2 - (HE)^2 = 4(AP)^2 - (HE)^2$ ; ma  $(AP)^2 = \frac{1}{2}$  (§ 104),  $(HE)^2 = 2 - \sqrt{2}$  (§§ 30 e 36). Dunque

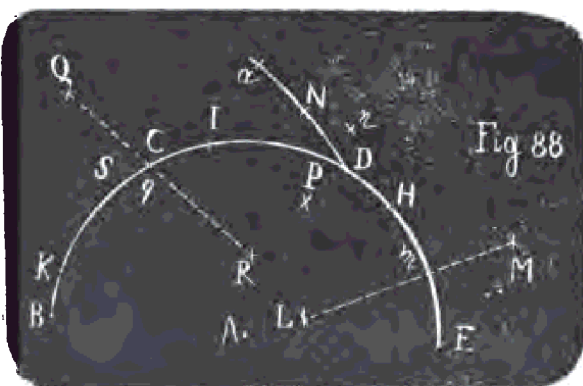
$(LM)^2 = \sqrt{2}$ ; quindi  $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$ .

Essendo pure  $aQKR$  un rombo, si avrà egualmente  $(QR)^2 = 4(aQ)^2 - (aK)^2$ . Ma  $(aQ)^2 = (AB)^2 = 1$ ;  $(aK)^2 = 4 - \sqrt{3}$  (§161). Dunque  $(QR)^2 = \sqrt{3}$ ; quindi  $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$ .

175. Con simili artifizj si potrebbero trovare le radici quarte degli altri numeri interi senza servirsi del metodo di trovare le medie proporzionali (§ 99). Con esso per avere  $\sqrt{\sqrt{2}}$  si sarebbe dovuta trovare una media proporzionale tra 1 e  $\sqrt{2}$ , ovvero tra  $\frac{1}{2}$  e  $2\sqrt{2}$ , o tra altre due quantità, che moltiplicate una per l'altra dessero  $\sqrt{2}$ . Ma la sua strada sarebbe molto più complicata. Se si coltiverà questa Geometria del Compasso, se ne avranno dei frutti utilissimi. Io tengo preparate sopra ciò altre ricerche, che potranno aver luogo in un'Opera più estesa di questa. Ecco un uso del Problema antecedente per rapporto alla piramide tetraedra regolare.

176. *Prob.* Dato il lato  $AB$  (fig. 89) d'una piramide tetraedra regolare  $SABC$ ; trovare: 1° la sua altezza; 2° il lato d'un quadrato, che ne agguagli la superficie; 3° il lato d'un quadrato, sul quale costruendo una piramide, che abbia per altezza il lato della proposta, la agguagli in solidità; 4° il lato d'un quadrato, sul quale costruendo una piramide d'altezza eguale alla proposta, l'agguagli anche in solidità; 5° il raggio d'una sfera circoscritta.

*Sol.* Costruita col raggio  $AB$  la figura 88, come nel Proble-



ma § 174, col centro  $B$ , e col raggio  $Ba$  si descriva l'arco  $aN$ , e si faccia ad  $Aa=EN$ . Col raggio

$AN$ , e coi centri  $A$  ed  $E$  si segnino due archi, che si taglino in  $n$ . Collo stesso raggio  $nA$ , centro  $n$ , si tagli la semicirconferenza  $BCDE$  in  $S$ . Si divida  $LM$  per metà in  $m$  (§ 66), così pure  $QR$  per metà in  $q$ . Sarà:

- 1°  $BS$  l'altezza della piramide.
- 2°  $QR$  il lato del quadrato, che ne agguaglia la superficie.

3°  $Mm$  il lato del quadrato base d'una piramide d'altezza eguale al lato della proposta, e ad essa eguale in solidità.

4°  $Qq$  il lato del quadrato base d'una piramide di altezza e di solidità eguale alla proposta.

5°  $AN$  il diametro d'una sfera circoscritta.

*Dim.* Se dal vertice  $S$  della piramide si cali una perpendicolare  $Sm$  sul lato  $AB$ , essendo equilatero il triangolo  $SAB$ , essa taglierà in  $m$  per metà la  $AB$  (12, lib. I). Se quindi nella base  $ABC$  si alza alla  $AB$  da  $m$  la perpendicolare  $mT$ , essa passerà per  $C$  (11, lib. I), e sarà in essa il punto  $T$ , dove cade da  $S$  la perpendicolare sulla base (11, lib. XI). Egualmente si dimostra, che il punto  $T$  sarà nella retta  $Bn$ , che taglia per metà il lato  $AC$ . Si guidi la  $mn$ , essa sarà parallela alla  $BC$  (2, lib. VI), e il triangolo  $Amn$  sarà equiangolo al triangolo  $ABC$  (27, lib. I), e la  $BC$  dupla della  $mn$  (4, lib. VI). Saranno poi equiangoli tra loro i triangoli  $BCT$ ,  $mnT$  (15 e 27, lib. I), e sarà  $BC:mn::CT:mT$  (4, lib. VI). Dunque  $CT$  doppia della  $mT$ ; quindi  $mT = \frac{1}{2} Cm$ . Posto poi  $AB=1$ , si ha  $Cm=Sm = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  (§ 104). Dunque  $Tm = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ . Essendo poi  $(Sm)^2 = (mT)^2 + (ST)^2$  (47, lib. I), cioè  $\frac{3}{4} = \frac{1}{12} + (ST)^2$ ; si avrà  $(ST)^2 = \frac{5}{12} = \frac{1}{3}$ ; quindi  $ST = \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Si ha poi (fig. 88)  $AN = \frac{1}{2}\sqrt{6}$  (§ 104) =  $\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = An$ . Si ha pure  $An:AS::AS:SB$  (§ 86); cioè  $\sqrt{\frac{3}{2}}:1::1:SB$ . Quindi  $SB = \sqrt{\frac{2}{3}} = ST$ . (fig. 89) Che era il primo.

La superficie poi della piramide tetraedra è eguale al quadruplo della superficie della base (fig. 89)  $ABC$ , la quale es-



sendo eguale a  $\frac{1}{2}AB$ .  $Cm = \frac{1}{4}\sqrt{3}$  (41, lib. I), sarà la superficie della piramide  $= \sqrt{3}$ . Quindi il lato del quadrato, che l'agguaglia  $= \sqrt{\sqrt{3}}$ . Ma è (fig. 88) la  $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$  (§ 174). Dunque la  $QR$  è il lato del quadrato cercato. Che era il secondo.

Essendo nelle piramidi eguali reciproche tra loro le basi e le altezze (9, lib. XII), si avrà  $1 : \sqrt[3]{\frac{2}{3}} :: \frac{1}{4}\sqrt{3} : \text{alla base della piramide, che ha l'altezza } = AB = 1$ . Quindi sarà l'area di questa base  $= \frac{1}{4}\sqrt{2}$ , e il lato del quadrato di quest'area  $= \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}} = Mm$  (§ 174). Che era il terzo.

Essendo le piramidi d'altezza eguale in ragione delle basi, il quadrato eguale al triangolo  $ABC = \frac{1}{4}\sqrt{3}$  avrà per lato  $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}} = Qq$  (§ 173). Che era il quarto.

È poi il diametro della sfera circoscritta alla piramide tetraedra la potenza sesquialtera del lato della piramide (13, lib. XIII), cioè  $= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ . È dunque  $= AN$ . Che era il quinto.

177. *Prob.* Data l'altezza  $ST$  d'una piramide (fig. 88 e 89) tetraedra regolare, trovare il suo lato  $AB$ .

*Sol.* Con un raggio  $AB$  (fig. 88) eguale ad  $ST$  (fig. 89), si descriva il semicerchio  $BCDE$  fatto ad  $AB = BC = CD = DE$ . Col centro  $B$ , e col raggio  $BD$  si descriva l'arco  $DNa$ , e collo stesso raggio, e col centro  $E$  si tagli in  $a$ . Col raggio  $Aa$ , e collo stesso centro  $E$  si tagli in  $N$ . Sarà  $AN$  il lato cercato eguale al lato  $AB$  della fig. 89.

*Dim.* Nella fig. 88 si ha  $AB : AN :: 1 : \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$  (§ 176), ed essendo  $1 : \sqrt[3]{\frac{3}{2}} :: \sqrt[3]{\frac{2}{3}} : 1$ , come resta dimostrato dall'eguaglianza del prodotto degli estremi e dei medj, sarà  $AB$  ad  $AN$  come  $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$  ad 1, cioè nel rapporto dell'altezza della piramide tetraedra al suo lato (§ 176). Dunque ecc.

178. *Prob.* Dividere (fig. 90) la  $AB = 1$  in cinque parti eguali anche nel caso, che non si possa avere una quintupla della  $AB$ , come al § 69.

*Sol.* Col raggio  $AB$ , e col centro  $A$  descritto il cerchio  $BDp$ , e fatto nella sua circonferenza ad  $AB = BC = CD = DE$ , quindi a  $BD = Ba = B\alpha = Ea = E\alpha$ , col raggio  $AB$ , e col centro  $\alpha$  si tagli la circonferenza in  $g$ , e collo stesso raggio, e col centro  $g$  si descriva l'arco  $An\alpha$ . Ora col raggio  $BE$ , e col centro  $\alpha$  si tagli quest'arco in  $n$ . Col raggio  $\alpha n$ , e col centro  $B$  si tagli la cir-



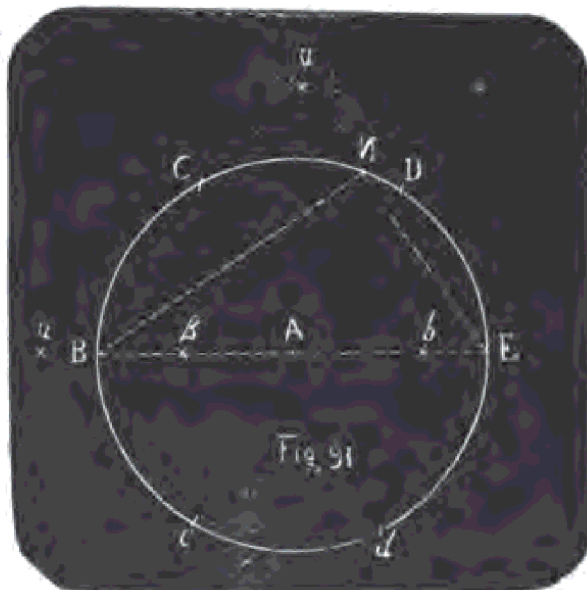


col centro  $E$ , e col raggio  $EQ$  si tagli la circonferenza in  $N$ . Sarà il triangolo  $BNE$  il cercato.

*Dim.* Esso sarà rettangolo (31, lib. III). Posto poi  $AB=1$ , sarà  $EQ=EA+AQ=\frac{9}{5}=EN$ . Ed avendosi  $(BE)^2=(EN)^2+(BN)^2$  (47, lib. I), cioè  $4=\frac{36}{25}+(BN)^2$ , sarà  $(BN)^2=\frac{64}{25}$ , quindi  $BN=\frac{8}{5}$ ,  $BE=\frac{10}{5}$  in proporzione aritmetica.

181. *Prob.* Descrivere (fig. 91) un triangolo rettangolo, i di cui lati siano in proporzione geometrica.

*Sol.* Con un raggio  $AB$ , centro  $A$  si descriva un cerchio  $BDd$ , e si faccia nella sua circonferenza ad  $AB=BC==CD=DE=Ed=dc$ . Quindi si faccia a  $BD=Ba=Ea$ , quindi ad  $Aa=D\beta=d\beta=Cb=cb$ . Ora col raggio  $b\beta$ , e col centro  $E$  si tagli la circonferenza del cerchio in  $N$ . Il triangolo  $BNE$  sarà il cercato.



*Dim.* La  $AB$  resta divisa in  $\beta$  in estrema e media ragione (§ 46). Quindi se si faccia  $AB=1$ ;  $A\beta=x$ , si avrà  $B\beta=1-x$ ;  $x^2=1-x$ ; e quindi  $x=A\beta=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ , donde risulta  $b\beta=2A\beta=\sqrt{5}-1=EN$ . Si ha poi  $(BE)^2=(EN)^2+(BN)^2$  (31, lib. III; 47, lib. I), cioè  $4=6-2\sqrt{5}+(BN)^2$ , Quindi  $(BN)^2=2(\sqrt{5}-1)=BE \cdot NE$ . Si ha dunque  $BE:BN::BN:NE$  (17, lib. VI). Dunque ecc.

182. *Lemma.* Posti i lati dei cinque poliedri regolari  $=1$ , sarà il raggio d'una sfera, che contiene

$$\text{il tetraedro} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\text{il cubo} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\text{l'ottaedro} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\text{il dodecaedro} = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5}+1),$$

$$\text{l'icosaedro} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$



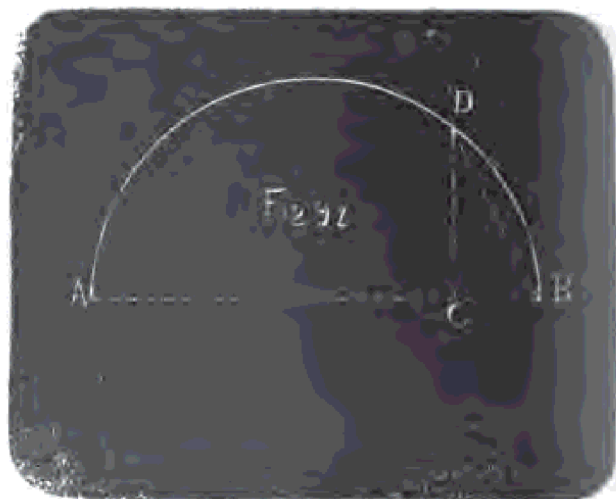
*Dim.* Per la 13, lib. XIII il diametro della sfera, che contiene la piramide compresa da quattro triangoli equilateri, è per potenza sesquialtero del lato della piramide, cioè posto il lato  $=1$ , è il diametro  $=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ; quindi il raggio  $=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ .

Per la 15, lib. XIII il diametro della sfera, che contiene il cubo, è per potenza triplo del lato, cioè  $=\sqrt{3}$ ; quindi il raggio  $=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

Per la 14, lib. XIII il diametro della sfera, che comprende l'ottaedro, cioè quel corpo regolare, che ha otto faccie tutte triangoli equilateri, è duplo in potenza del lato d'uno di questi triangoli, cioè  $=\sqrt{2}$ ; quindi il raggio  $=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

Per la 17, lib. XIII la sfera, che comprende il dodecaedro, cioè quel corpo regolare, che ha dodici faccie tutte pentagoni regolari, comprende anche un cubo, che ha per lato una diagonale di quei pentagoni. Ma la diagonale  $BN$  (fig. 64) d'un pentagono  $ABLMN$ , posto il lato  $AB=1$ , dico che è  $=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ . Poichè è (§ 137)  $BN=BE=AB+AE=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)+1$  (§ 182)  $=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ . Dunque la  $BN$ , ossia la diagonale d'un pentagono, che ha il lato  $=1$ , è  $=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ . Se sopra questa si forma un cubo, il diametro della sfera, che lo comprende, sarà di potenza triplo di questa, cioè  $=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\sqrt{3}$ . Dunque il raggio di questa sfera, che comprende il dodecaedro, è  $=\frac{1}{4}\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$ .

Per la 16, lib. XIII se sia  $AB$  il diametro della sfera, che comprende l'icosaedro, e presa (fig. 92) in esso la  $AC$  quadrupla di  $CB$ , e alzata la perpendicolare  $CD$ , che incontra in  $D$  la semicirconferenza  $ADB$ , se col raggio  $DB$  si descrive un cerchio, e in questo cerchio un pentagono regolare, il lato di questo pentagono sarà il lato dell'icosaedro, cioè di quel corpo regolare, che ha venti faccie tutte triangoli equilateri. Ora il lato del pentagono ha quel



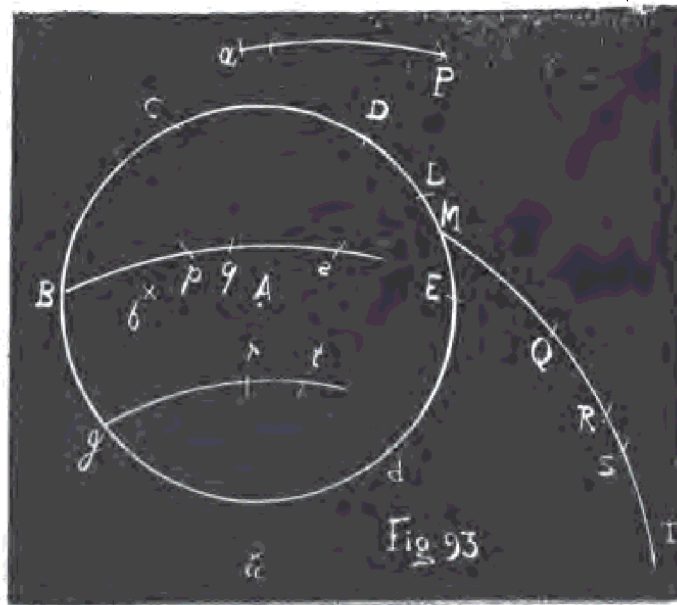
rapporto al raggio del cerchio circoscritto, che ha la retta  $Bb$  alla  $BA$  (fig. 12) (§ 40). Ma posto  $AB=1$ , si ha  $Ab=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ ;  $(Ab)^2=\frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ ;  $(Bb)^2=(AB)^2+(Ab)^2$  (47, lib. I)  $=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ . Quindi si avrà  $Bb:AB::\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}:1$ ; ma si ha

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}:1::1:\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

Dunque posto il lato dell'icosaedro=1, sarà  $BD$  (Fig. 92)= $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ . Si ha poi  $(AB)^2=5(BD)^2$  (16, lib. 13)= $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ . Dunque  $AB=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ , e il raggio  $=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ .

183. *Prob.* Dato il lato  $AB$  (Fig. 93) dei cinque corpi regolari, trovare il raggio delle diverse sfere, che li comprendono.

*Sol.* Col raggio  $AB$ , centro  $A$ , si descriva il cerchio  $Bdd$ , e si faccia nella sua circonferenza ad  $AB=BC=CD=DE=Ed$ . Quindi si faccia a  $BD=Ba=Ba=Ex=Ea$ . Col centro  $\alpha$ , e col raggio  $\alpha a$  si descriva l'arco  $aP$ . Collo stesso centro  $\alpha$ , e col raggio  $\alpha B$  si descriva l'arco



$Bpqs$ . Collo stesso centro  $\alpha$ , e col raggio  $AB$  si descriva l'arco  $grt$ . Collo stesso centro  $\alpha$ , e col raggio  $BE$  si descriva l'arco  $MQRST$ . Col raggio  $Aa$ , e coi centri  $D, d$  si descrivano due archi, che si taglino in  $b$ . Col raggio  $Ab$ , e col centro  $E$  si tagli la circonferenza in  $L$ . Si faccia ad  $AB=aP=MQ$ , quindi



il raggio  $AB$  (Fig. 94) della sfera, che comprende i cinque corpi regolari, trovare i lati di essi.

*Sol.* Sia col raggio  $AB$ , centro  $A$ , descritto il cerchio massimo della sfera  $BDd$ , e sia fatto nella sua circonferenza ad  $AB=BC=CD=DE=Ed$ . Quindi a  $BD=Ba=Ea$ ; quindi ad  $Aa=Db=db$ .

Si faccia poi nella circonferenza ad  $AB=aH$ , quindi ad  $Aa=EF=Hh$ . Col centro  $a$ , e col raggio  $aE$  si descriva l'arco  $ESQP$ . Collo stesso centro  $a$ , e col raggio  $BE$  si descriva l'arco  $Lstqp$ . Collo stesso centro  $a$ , e col raggio  $ah$  si descriva l'arco  $hT$ . Si faccia ad  $Aa=EP$ ; ad  $AB=EQ$ ; ad  $Ab=ES$ ; a  $bF=hT$ . Quindi si faccia ad  $EL=Pp=Qq=ss$ ; quindi ad  $hL=Tt$ . Sarà

$Lp$	il lato	tetraedro
$Lq$	del	cubo
$Aa$		ottaedro
$Ls$		dodecaedro
$Lt$		icosaedro

*Dim.* Si ha l'arco  $Eh$  eguale ad una ottava parte della circonferenza (§ 30); quindi  $ah=\sqrt{5}$  (§ 186). Essendo poi retto l'angolo  $bAF$ , lo stesso che  $BAF$  per essere il punto  $b$  sulla  $AE$  (§§. 13, 27), sarà  $bF$  il lato del pentagono (§ 40),  $Ab$  il lato del decagono inscritto al cerchio  $BDd$  (§ 41). Posto dunque  $AB=1$ , sarà  $Ab=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$  (§ 181),  $(bF)^2=(AF)^2+(Ab)^2=1+\frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ; quindi  $bF=hT=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ . Si avrà poi  $aE:aL::EP:Lp$  (§ 93), cioè  $\sqrt{3}:2::\sqrt{2}:Lp$ . Sarà dunque  $Lp=2\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Ora il rapporto del raggio della sfera al lato del tetraedro contenuto è  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}:1$  (§ 182):: $1:2\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Posto dunque il raggio  $AB$  della sfera=1; sarà  $Lp$  il lato del tetraedro contenuto.

Si avrà pure (§ 93)  $aE:aL::Eq:Lq$ , cioè  $\sqrt{3}:2::1:Lq$ ; quindi  $Lq=2\sqrt{\frac{1}{3}}$ . Ora il rapporto del raggio della sfera al lato del cubo contenuto è  $\frac{1}{2}\sqrt{3}:1$  (§ 182):: $1:2\sqrt{\frac{1}{3}}$ . Dunque ecc.

Si avrà parimente  $Aa=\sqrt{2}$  lato dell'ottaedro. Poichè il

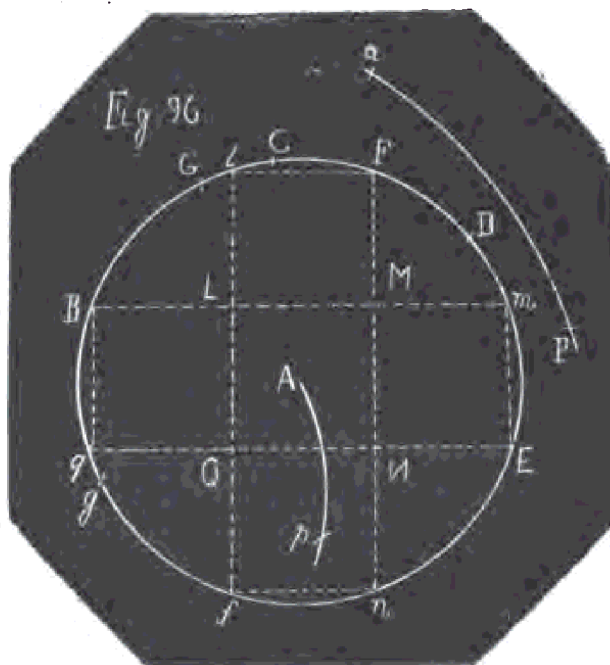


punti  $Q, A, p, B, P$  della figura 3 dall'equazione  $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - pP \cdot pQ$  appartenente alla fig. 3 (§ 17) si ricaverà l'equazione per questa figura 95,  $(Aa)^2 = (AE)^2 + (Ea)^2 - EP \cdot Ea$ . Quindi (§ 27)  $2 = 1 + 3 - EP \cdot \sqrt{3}$ . Quindi  $2 = EP \cdot \sqrt{3}$ ; ed  $EP = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Essendo poi i tre punti  $E, P, a$  nella stessa retta (§ 13), sarà  $Pa = Ea - EP = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Si supponga guidata la  $BE$ , che tagli in  $R$  la  $Dd$ ; sarà (§ 104)  $BR = \frac{1}{2}$ ;  $RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ;  $BE = 2$ ; quindi la quarta proporzionale alle tre  $BR, RD, BE$  sarà  $= \frac{2}{\sqrt{3}} = EM$ . Sarà pure (§ 104)  $RE = \frac{1}{2}$ ,  $BD = \sqrt{3}$  (§ 2). Quindi la quarta proporzionale alla tre  $BR, BD, RE$  sarà  $= \frac{1}{\sqrt{3}} = DM$ . Saranno dunque le  $EM, DM$  della quantità richiesta, perchè il triangolo  $BEM$  riesca simile al triangolo  $BRD$  (2, lib. VI). Dunque saranno simili, poichè il punto  $M$  non potrebbe cascare in altro luogo (8, lib. I). Si proverà nella stessa maniera, che il triangolo  $BRd$  è simile al triangolo  $BEL$ . Quindi il triangolo  $BDd$  è simile al triangolo  $BML$  (20, lib. VI). Dunque anche questo è equilatero. Sono inoltre retti gli angoli  $BEM, BEL$  eguali agli angoli  $BRD, BRd$ , e sono eguali le rette  $EM, EL$ . Dunque il triangolo  $BLM$  è il cercato.

186. *Prob.* In un cerchio (fig. 96) di raggio dato  $AB$  inscrivere cinque quadrati eguali, de' quali uno sia concentrico al cerchio, e gli altri lo tocchino, avendo ciascuno un lato comune col quadrato di mezzo.

*Sol.* Si facciano al raggio  $AB$  eguali le corde  $BC, CD, DE$ . Si faccia a  $BD = Ba = Ea$ . Ad  $Aa$  si facciano eguali le corde  $BF, Bf$ . Col raggio  $AB$ , e col centro  $a$  si tagli il cerchio in  $G$ , e si faccia ad  $Aa$  eguale la corda  $Gg$ . Col





raggio  $ga$ , e col centro  $g$  si descriva un arco  $aP$ , e si faccia sotto esso la corda  $aP=aA$ . Collo stesso centro  $g$ , e col raggio  $gA$  si descriva un arco  $Ap$  sulla direzione dell'arco  $aP$ . Si faccia ad  $aA=Pp$ . Si facciano ora ad  $Ap$  eguali le corde  $Bq, fn, Em, Fl$ . Collo stesso raggio  $Ap$ , e coi centri  $B, q, f, n, E, m, F, l$  si descrivano degli archi, che si taglino dentro il cerchio in  $L, Q, N, M$ . Sarà  $LMNQ$  il quadrato centrale,  $BLQq, fQnN, ENMm, FMLl$  gli altri quadrati cercati.

*Dim.* Se si confrontino i punti  $a, A, G, B, q$  di questa figura coi punti  $Q, p, A, R, S$  della figura 4, si avrà dal § 21 l'equazione per questa figura 96,  $(ag)^2 = (aB)^2 + Gg \cdot Aa$ . Cioè posto il raggio  $AB=1$ ,  $(ag)^2 = 3+2=5$  (§ 27); quindi  $ag=\sqrt{5}$ . È poi  $aP=aA=\sqrt{2}$ . Ora si ha  $ga:aP::gA:Ap$  (§ 93), cioè  $\sqrt{5}:\sqrt{2}::1:Ap$ . Quindi  $Ap=\sqrt{2}/\sqrt{5}=Em$ . Essendo poi  $BCDE$  una semicirconferenza (§ 64), sarà  $BmE$  un angolo retto (31, lib. III), quindi  $(BE)^2=(Bm)^2+(mE)^2$ ; cioè  $4=(Bm)^2+2/5$ . Quindi  $(Bm)^2=9/5$ , e  $Bm=3\sqrt{2}/5=3mE$ . Dello stesso valore si troverà essere  $qE$ , e si dimostrerà esser retti tutti gli altri angoli del quadrilatero  $BmEq$ , che sono in semicerchj. Dunque esso è un parallelogrammo rettangolo. Istessamente si dimostra essere un parallelogrammo rettangolo  $Flfn$ . Se si faccia la corda  $Em=k$ , sarà  $mF$  corda del complemento al quadrante  $=h$  (§ 159), e si avrà  $h^2=2-2k\sqrt{1-1/4k^2}$ . Quindi essendo  $k^2=2/5$ , si avrà  $h^2=2-2k\sqrt{3/10}=2-2\sqrt{6}/5=2-2/5=4/5=2k^2$ , cioè  $(Fm)^2=(FM)^2+(Mm)^2$ . Quindi l'angolo  $FmM$  sarà retto (48, lib. I); così gli altri  $BLl, fQq, ENn$ . Se poi si chiami  $x$  la distanza del punto  $m$  dal punto dove cade la perpendicolare da  $F$  sopra la  $Bm$ , si avrà (13, lib. II)  $(BF)^2=(Fm)^2+(Bm)^2+2Bm \cdot x$ , cioè  $2=4/5+18/5-6x\sqrt{2}/5$ . Quindi  $x\sqrt{2}/5=2/5$ , e dividendo per  $\sqrt{2}/5$ , si ha  $x=\sqrt{2}/5=mM$ . In seguito se si chiami  $y$  la perpendicolare, che da  $F$  cade sulla  $Bm$ , si avrà  $y^2=(Fm)^2-x^2=4/5-2/5=2/5$ ; quindi  $y=\sqrt{2}/5=FM$ . Quindi si dimostra essere il punto  $M$  sulla  $Bm$ . Egualmente si dimostra esservi il punto  $L$ . Essendo dunque  $Bm=3Em=Mm+BL+Em$ ; sarà anche  $LM=Em$ . Si dimostrano poi dello stesso valore gli altri lati  $MN, NQ, LQ$ . Dalle cose dette fin qui resta pur dimostrato essere retti gli angoli ai punti  $L, M, N, Q$  esterni al quadrilatero  $LMNQ$ ,

dunque lo saranno anche gli interni, e si avranno i cinque quadrati, che si volevano.

187. *Prob.* Dati (fig. 97) i cinque punti  $A, B, C, D, E$  estremi di un pentagono regolare; trovare i cinque punti  $a, b, c, d, e$ , nei quali si taglierebbero le diagonali di esso pentagono.

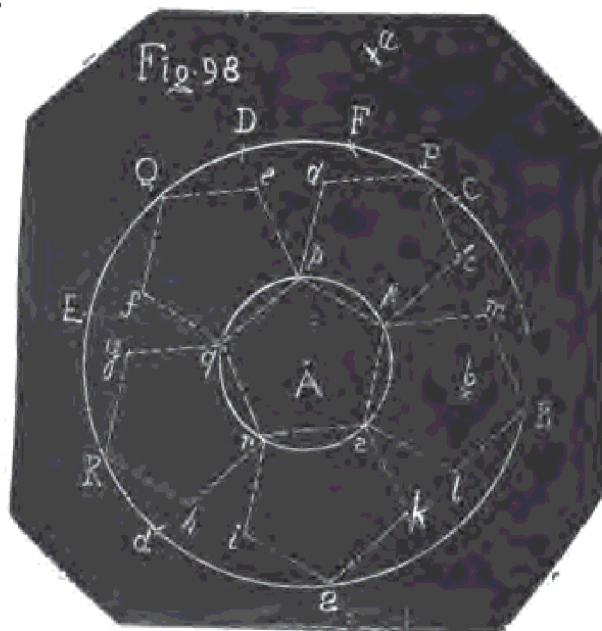
*Sol.* Col lato del pentagono  $AB$  preso per raggio, e coi centri  $A, B, C, D, E$  si segnino degli archi, che si taglino in  $a, b, c, d, e$ . Sarà fatto.

*Dim.* Se si suppongano condotte le diagonali, e segnati i lati del pentagono  $ABCDE$ , si avrà l'angolo  $BAC=BDA$  (29, lib. III)  $=CAD$ . Quindi  $Ab=bD$  (6, lib. I). Si avrà poi  $BbA = bDA + bAD$  (32, lib. I)  $= BAb + bAD = BAD = ABD$  (5, lib. I). Quindi il triangolo  $ABb$  sarà isoscele (6, lib. I), cioè sarà  $AB=Ab=bD$ . Dunque ecc.

Questa figura è il pentalfa, ossia l'igla di Pitagora.

188. *Prob.* In un cerchio (fig. 98) di raggio dato  $AB$  inscrivere sei pentagoni regolari.

*Sol.* Si faccia nella circonferenza ad  $AB=BC=CD=DE=Ed$ . Quindi ad  $BD=Ba=Ea$ . Quindi ad  $Aa=BF=Db=db$ . Si



faccia nella circonferenza a  $bF = BP = PQ = QR = RS$ . Collo stesso raggio  $bF$ , e coi centri  $B, P, Q, R, S$  si segnino degli archi, che si taglino in  $\beta, p, q, r, s$ . Ora col raggio  $\beta p$ , e coi centri  $\beta, P$  si segnino due archi, che si taglino  $c$ . Collo stesso raggio, e coi centri  $P, p$  si segnino due archi, che si taglino in  $d$ . Si avranno due dei pentagoni cercati, cioè  $\beta p q r s$ , pentagono al centro  $A$ , e  $\beta p d P c$ , che tocca il cerchio dato in  $P$ . Nella stessa guisa si troveranno i vertici, che mancano agli altri quattro pentagoni  $p q f Q e$ ,  $q r h R g$ ,  $r s k S i$ ,  $s \beta m B l$ .

*Dim.* Saranno i punti  $B, P, Q, R, S$  estremi di un pentagono regolare inscritto al cerchio dato (§§ 40, 128). Quindi saranno i punti  $\beta, p$  nella diagonale  $BQ$ ; i punti  $p, q$  nella diagonale  $PR$  (§ 187), ed essendo  $Bp = \beta Q$ , sarà  $B\beta = pQ$ . Istessamente si proverà  $Pp = qR$ , e per essere  $BQ = PR$  (27, lib. III), sarà anche  $B\beta = Pp$  e  $\beta p = pq$ . Istessamente si proverà, che sono uguali tra loro tutti i lati del pentagono  $\beta p q r s$ . Si ha poi l'angolo  $\beta p q$ , cioè  $BpR = BPR + PBp$  (32, lib. I); ma  $PBp$  cioè  $PBQ = QPR$ . Dunque  $\beta p q = BPQ$ . Istessamente si dimostra, che gli altri angoli del pentagono  $\beta p q r s$  sono eguali agli angoli del pentagono  $BPQRS$ . Dunque sòno entrambi regolari. Si avrà inoltre l'angolo  $QBR$ , formato da due diagonali del pentagono  $BPQRS$ , che è l'angolo  $\beta Bs$ , eguale all'angolo  $\beta qs$  formato da due diagonali del pentagono  $\beta p q r s$  (20, lib. VI). Quindi essendo isosceli entrambi i triangoli  $\beta Bs$ ,  $\beta qs$ , avranno eguali tra loro anche gli angoli alla base comune  $\beta s$  (5, 32, lib. I); quindi anche i triangoli saranno in tutto eguali (26, lib. I). Quindi i triangoli  $Bm\beta$ ,  $\beta p q$ , avendo tutti i lati eguali tra loro, avranno eguali anche gli angoli (8, lib. I), come pure i triangoli  $Bls$ ,  $srq$ . Quindi tutti i lati e gli angoli del pentagono  $Bm\beta sl$  saranno eguali ai lati e agli angoli del pentagono  $\beta p q r s$ , e però entrambi saranno regolari. Lo stesso si dimostra degli altri pentagoni  $\beta c P d p$ ,  $p e Q f q$ ,  $q g R h r$ ,  $r i S k s$ . Dunque ecc.

189. Il punto  $b$  sarà centro del pentagone  $\beta m B l s$ , e la distanza  $bB$  raggio del cerchio circoscritto ad esso pentagono, e agli altri eguali, come dimostreremo subito; il che aggiunge una nuova bella proprietà al punto  $b$  già rimarcato tante volte in questa Geometria. Poichè oltre alle divisioni in estrema e media ragione, che per esso nascono nel diametro  $BAE$  (§§ 45,

46), e la determinazione fatta per esso della  $bF$  lato del pentagono inscritto al cerchio di raggio  $AB$  (§ 40), e della  $bA$  lato del decagono inscritto allo stesso cerchio (§ 41); si ha ancora  $Bb$  raggio del cerchio circoscritto ai sei pentagoni, che si possono inscrivere al maggior cerchio di raggio  $AB$ , come nel presente Problema. Difatti posto il raggio  $AB=1$ , si ha  $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$  (§ 181); essendo poi  $(BE)^2 = (BQ)^2 + (QE)^2$  (31, lib. III)

$$= (BQ)^2 + (Ab)^2; \text{ ne verrà } BQ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}. \text{ Si ha poi } \beta Q = BP =$$

$$= bF = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \text{ (§ 182). Quindi } BQ : \beta Q :: BQ \cdot \beta Q : (\beta Q)^2 :: \sqrt{5} :$$

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} :: 1 : \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) :: BA : bA. \text{ Quindi } BQ : BQ - \beta Q :: BA :$$

$BA - bA$ , cioè  $BQ : B\beta :: BA : Bb$ . Saranno dunque le due diagonali dei pentagoni  $BPQRS$ ,  $Bm\beta sl$  tra loro come  $BA : bA$ . Essendo dunque  $BA$  raggio del primo pentagono; sarà  $Bb$  raggio del secondo (20, lib. VI).

190. *Prob.* Dati (fig. 99) i vertici di un esagono regolare  $BCDEdc$ ; trovare i punti  $l, m, n, g, p, q$ , nei quali si tagliano le sue diagonali, che non passano pel centro.

*Sol.* Si faccia a  $BD = Ba = Ea$ ; quindi a  $BC = BA = CA = Bx$ ; ad  $aA = ax$ ; ad  $\alpha B = \alpha P = AP$ . Ora col raggio  $aP$ , e coi centri  $B, C$  si segnino due archi, che si taglino in  $l$ ; coi centri  $C, D$  altri due, che si taglino in  $m$ , e così via via. Saranno questi i punti cercati.

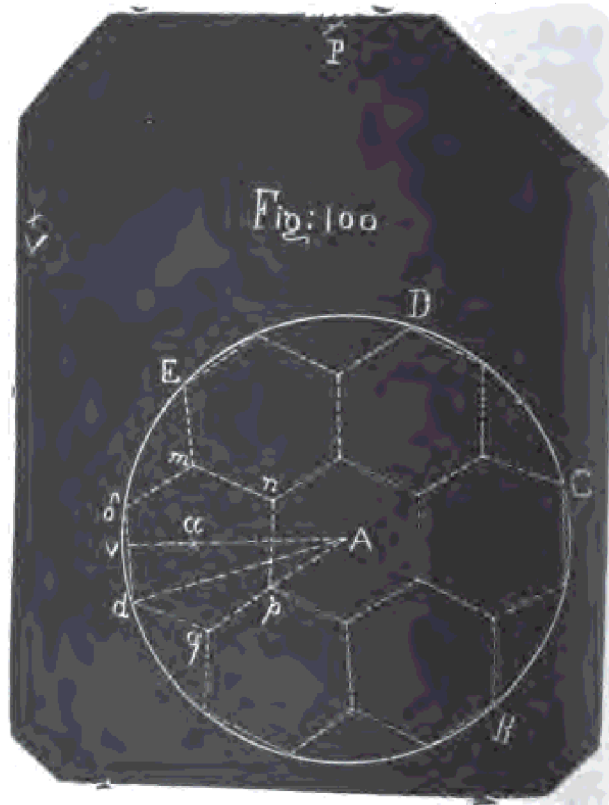
*Dim.* Si supponga, che le diagonali indicate si taglino in  $l, m, n, g, p, q$ . Essendo l'angolo  $BDC = DCE$  (29, lib. III), sarà  $BD$  parallela a  $cE$  (29, lib. I). Sarà dunque il triangolo  $CIm$  simile al triangolo  $CcE$  (2, 5, lib. VI), e però equilatero. Iste-



samente lo sarà il triangolo  $Blq$  simile al triangolo  $BdD$ . Essendo poi il triangolo  $CcE$  eguale al triangolo  $BdD$ , per avere i lati eguali a quelli di esso (§ 2) (8, 4, lib. I), ed essendo il lato  $BD$ , e quindi  $lm$ , egualmente distante dal lato  $cE$  che il lato  $Cc$ , e quindi  $ql$ , dal lato  $dD$  (14, lib. III), se si sovrapponga il triangolo  $BdD$  al triangolo  $CcE$ , la retta  $ql$  cascherà sulla retta  $lm$  e le sarà eguale. Ma è  $Bl=lq$ . Dunque  $Bl=lm$ . Istessamente si dimostra, che è  $Dm=ml$ . Dunque è  $Bl=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\sqrt{3}$  (ponendo il raggio del cerchio  $BC=AB=1$ ) (§ 2). Istessamente  $Cl=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ . Ma si sono appunto prese  $Bl=Cl=aP=\frac{1}{2}\sqrt{3}$  (§ 185). Dunque  $l$  è uno dei punti cercati. Lo stesso si dimostra degli altri punti  $m, n, g, p, q$ . Dunque ecc.

191. *Prob.* Nel cerchio (fig. 100) di raggio dato  $AB$  inscrivere sette esagoni regolare, uno dei quali sia concentrico al cerchio, e gli altri siano disposti intorno ad esso.

*Sol.* Si faccia nella circonferenza del cerchio dato ad  $AB=BC=CD=DE=Ed$ . Quindi a  $DB=DV=dV$ . Col raggio  $CV$ , e coi centri  $C$  ed  $A$  si segnino due archi, che si taglino in  $P$ . Collo stesso raggio  $PC$ , centro  $P$  si tagli la circonferenza del cerchio dato in  $\delta$ . Sarà  $d\delta$  il lato degli esagoni da inscrivere, i quali si inscriveranno facilmente uno presso l'altro. Poichè collo stesso lato  $d\delta$  preso per raggio, e coi centri  $d, \delta$  si segnino due archi, che si taglino in  $\alpha$ . Collo stesso raggio, e col centro  $\alpha$  si descriva un cerchio, dentro il quale si inscriva un esagono regolare (15, lib. IV)  $d\delta mnpq$ . Collo stesso raggio, e col centro  $A$  si descriva un cerchio, che





passerà per  $np$ . In esso si descriva l'esagono, che ha per uno dei lati  $pn$ . Sopra i lati di questo esagono si descrivano gli altri esagoni, come si è fatto da prima sul lato  $d\delta$ , e sarà fatto quanto volevasi.

*Dim.* Posto per brevità  $AB=1$ ; sarà  $CP=CV=\sqrt{7}$  (§ 100)  $=AP$ . Sarà poi  $AP:A\delta::A\delta:\delta d$  (§ 86); cioè  $\sqrt{7}:1::1:\delta d$ ; quindi  $\delta d=\sqrt{1/7}$ .

Si suppongano per un momento inscritti gli esagoni cercati, e sia l'incognita  $d\delta$  lato di essi  $=x$ ; si divida essa per metà in  $v$ , e si guidi la  $Av$ , che le sarà perpendicolare (§ 83), e passerà per  $\alpha$  centro dell'esagono, di cui è lato  $d\delta$ , tagliando pure per metà in  $\mu$  il lato  $pn$  dell'esagono centrale. Essendo nel triangolo equilatero  $Apn$ ,  $pn:A\mu::1:1/2\sqrt{3}$  (§ 104); si avrà  $x:A\mu::1:1/2\sqrt{3}$ , quindi  $A\mu=1/2x\sqrt{3}$ , e quindi  $Av=3A\mu=3/2x\sqrt{3}$ ; è poi  $dv=1/2x$ . Essendo poi  $1=(Ad)^2=(Av)^2+(dv)^2$ ; sarà  $1=27/4x^2+1/4x^2=7x^2$ ; quindi  $x^2=1/7$ , ed  $x=\sqrt{1/7}$ , della quale grandezza si è appunto determinata la  $d\delta$  nella Soluzione del Problema, come si è dimostrato qui sopra. Dunque ecc.

Questo Problema si trova in *Pappo*, lib. VIII, Prob. 15, Prop. 19, sciolto colla riga e col compasso non più semplicemente di così. Egli vi ha pure aggiunta una costruzione meccanica.

192. Noi crediamo di avere omai adempito quanto abbiamo promesso ai §§ 6 e 7. E quanto al primo punto abbiamo già dati tutti gli elementi della *Geometria del Compasso*; cioè tutti que' Problemi, che bastano a potere col solo compasso senza la riga trovare tutti que' punti, che si possono trovare col compasso e colla riga insieme. Per dimostrar questo (§ 71) si osservi: primo, che per via della Geometria Elementare i punti d'un Problema si trovano o colla sezione degli archi fra loro, e questa è tutta cosa propria della Geometria del compasso, o colle sezioni degli archi e delle rette, o delle rette fra loro, e tutto questo articolo vien ad essere compreso dal Libro Settimo § 110 e seguenti. Una retta poi qualunque, che sia necessaria alla Soluzione d'un Problema, viene determinata dalla grandezza e dalla posizione. Per rapporto alla grandezza abbiamo insegnato ad ingrandire, diminuire, dividere qualunque grandezza finita in qualunque numero di parti nel Libro Terzo § 64



e seguenti, e nel Libro Quarto §§ 72, 73 e 74; a trovare poi le terze, le quarte, le medie proporzionali, così parimente a dividere una retta in qualunque ragione data, nel lib. V § 86 e seguenti. Riguardo alla posizione delle rette, essa si determina per via della posizione di due punti per ciascuna; ora servirà il Libro Quarto § 76 e seguenti a ritrovare i punti per ogni caso delle perpendicolari e delle parallele. Per collocar le rette tra loro ad ogni altro angolo dato per via di due punti, somministrerà quanto è necessario il Lib. VIII § 113 e seguenti. La divisione della circonferenza del cerchio e d'ogni arco in ogni maniera possibile alla Geometria Elementare è esaurita nel Libro II § 27 e seguenti. Dopo tutto ciò non veggo quale altro elemento si possa desiderare. Quanto poi riguarda la scelta dei Problemi, che abbiamo qui raccolti, lasceremo che i Matematici giudichino, se in un gran numero di casi utili o dilettevoli non sia pregio dell'opera, non solo per la precisione del risultato, ma ancora per la speditezza della costruzione, abbandonare la riga, e servirsi del solo compasso fino a quel termine, che trovati tutti i punti necessari al Problema, si abbia, se ciò bisogna, a condurre da un punto all'altro una o più rette, le quali certo col solo compasso segnar non si possono, ed abbisognano della riga.

## LIBRO DUODECIMO

### PROBLEMI PER APPROSSIMAZIONE

193. Tutti i Problemi superiori al secondo grado non si possono sciogliere geometricamente colla sola riga e col compasso; ma richieggono intersezioni di curve coniche o di gradi superiori; quindi non si possono risolvere nemmeno colla sola Geometria del Compasso esattamente. Gli stromenti per descrivere la cicloide, la concoide, la ciffaide, la trattoria, ed altre tali curve, che servono alla risoluzione di que' Problemi, benchè inventati con grande ingegno e riusciti nella pratica eleganti e spediti, non ostante quando non si tratti di avere tutto l'andamento di quella curva, alla quale sono destinati, ma solo di ottenere un punto coll'intersezione di quella con altre linee,

lasciano certo in pratica tale dubbio di piccoli errori, talvolta non ben calcolabili, che si avrà in moltissimi casi a preferire all'esattezza teorica di que' metodi un'approssimazione pratica abbastanza grande d'una costruzione fatta col compasso e colla riga. In questi casi dico, che il maggior numero delle volte sarà preferibile ancora una risoluzione ottenuta col solo compasso. Gli esempj lo mostreranno a chi vorrà fare il confronto delle nostre Soluzioni colle già conosciute.

194. Non essendovi finora metodo generale per ottenere colla Geometria Elementare queste approssimazioni, non si dovrà aspettare, che nemmeno io ne proponga uno per la mia *Geometria del Compasso*. Io non chiamo metodo Geometrico di approssimazione quello di ottenere prossimamente un valore coll'ajuto d'una di quelle scale, che si dicono geometriche, poichè all'uso di essa dovendo precedere un calcolo aritmetico; il metodo stesso si deve piuttosto chiamare aritmetico. Si supponga, per esempio, che si voglia la radice cubica del numero 2; l'estrazione, che si vuol fare aritmeticamente di questa radice per poter poi prendere le parti decimali o rotti di altra natura sopra una scala geometrica col compasso, ad oggetto di duplicare qualche cubo, fa sì, che il ripiego sia di ragione dell' Aritmetica, piuttosto che della Geometria.

195. Io non ho potuto specolare finora altro mezzo di ottenere prossimamente la soluzione di molti Problemi utili, superiori al secondo grado, fuori di quello di trovare varj generi, e come classi di costruzioni di figure elementari; quindi di assoggettare al calcolo il più gran numero che si possa, dei casi particolari pressochè innumerabili, che ne risultano. Tra essi scegliere quelli, che servono meglio all'intento, e adoperarli a risolvere il Problema.

196. Di questi generi, e quasi classi di costruzioni io ne ho esaminate molte, e tengo a parte delle ricerche sulle medesime. La più semplice classe è quella, della quale quasi unicamente faremo uso in quest'ultimo Libro della nostra Geometria, è fondata sui tre punti memorabili  $a$ ,  $b$  ed  $e$  (fig. 9, 11 e 12) (§ 59), che ci hanno già servito tanto ne' libri antecedenti, e sui quali venghiamo ad esporre le dodici equazioni da noi promesse (§ 59).

197. Sia (fig. 12) il punto  $Z$  considerato per un punto qua-

lunque preso sul quarto di circonferenza  $BF$  nella figura 12 costruita come nel lib. II, e nell'altro quarto  $Bf$  sia il punto  $z$ , cosicchè si abbia  $Bz=BZ$ . Si avrà (§§ 20 e 21).

$$(A) \dots (aZ)^2 = (aB)^2 - Zz \cdot Aa,$$

$$(B) \dots (bZ)^2 = (bB)^2 + Zz \cdot Ab,$$

$$(E) \dots (eZ)^2 = (eB)^2 - Zz \cdot Ae.$$

198. Se vogliamo le equazioni per le distanze dei tre punti  $a$ ,  $b$  ed  $e$  dal punto  $z$ , non si avranno, che a cambiare i segni nel secondo membro delle equazioni antecedenti, e si avrà (§§ 20 e 21)

$$(A') \dots (az)^2 = (aB)^2 + zZ \cdot Aa,$$

$$(B') \dots (bz)^2 = (bB)^2 - zZ \cdot Ab,$$

$$(E') \dots (ez)^2 = (eB)^2 + zZ \cdot Ae.$$

199. Essendo  $Zz$ , corda dell'arco doppio di  $BZ$ ,  $= 2 \text{ sen } BZ$ ; ed essendo nella supposizione di  $AB=1$ , che noi sempre riterremo,  $(aB)^2 = (BD)^2 = 3$  (§ 2);  $(Aa)^2 = 2$  (§ 27);  $(Bb)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  (§ 182);  $(Ae)^2 = 2 - \sqrt{2}$  (§ 38), quindi  $(eB)^2 = (AB)^2 + (Ae)^2 = 3 - \sqrt{2}$ ;  $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$  (§ 181); se si faccia  $aZ=a$ , si avrà  $(A') \dots a^2 = 3 - 2 \text{ sen } A \cdot \sqrt{2}$ ; comprendiamo sotto questa equazione anche il caso, che l'arco  $A$  sia negativo, cioè  $Bz$ , nel quale il segno-prefisso a  $2 \text{ sen } A \cdot \sqrt{2}$  si cambia in  $+$ .

200. Il valore di  $a$  può sempre essere quello d'una qualche corda del cerchio  $BDd$ , fuori che nel caso, che la distanza  $az$  espressa per  $a$  superi il valore di 2. Per calcolare più facilmente il valore di  $a$  in questi casi, essendo  $\sqrt{2} = BF = 2 \text{ sen } 45^\circ$ , e  $2 \text{ sen } A \text{ sen } 45^\circ = \cos(A-45^\circ) - \cos(A+45^\circ) = \cos(45^\circ - A) - \text{sen}(45^\circ - A)$  (§ 159), si avrà

$$(*) \quad a^2 = 3 - 2\cos(45^\circ - A) + 2\text{sen}(45^\circ - A).$$

201. Negli altri casi, nei quali  $a$  è minore di 2, chiamando  $A'$  quell'arco, del quale  $a$  è corda, si avrà  $\frac{a^2}{4} = \text{sen}^2 \frac{1}{2} A' =$

$$= \frac{1 - \cos A'}{2} \quad (156) = \frac{3}{4} - \text{sen } A \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} - \text{sen } A \cdot \cos 45^\circ; \text{ quindi}$$

riducendo  $\cos A' = 2 \text{ sen } A \cdot \cos 45^\circ - \frac{1}{2}$ ; quindi ancora (§ 157)

$$\cos A' = \text{sen}(A+45^\circ) + \text{sen}(A-45^\circ) - \text{sen } 30^\circ,$$

ovvero

$$(1) \quad \cos A' = \cos(45^\circ - A) - \text{sen}(45^\circ - A) - \text{sen } 30^\circ.$$

202. Se si vuole far servire questa equazione (1) alla divisione della circonferenza in quelle parti, che non si possono ottenere con precisione, si introdurrà in luogo di  $A$  un arco preciso, per esempio la ventesima parte (fig. 12) della circonferenza  $= 18^\circ$ , supponendo  $BZ=18^\circ$ , e si avrà  $\cos A' = \cos 27^\circ - \sin 27^\circ - \sin 30^\circ$ .

$$\begin{array}{rcl} \text{Ora} & \sin 27^\circ & = 0,4539905 \\ & \sin 30^\circ & = 0,5 \\ & \hline & & 0,9539905 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & \cos 27^\circ & = 0,8910065 \\ \text{Quindi} & \cos A' & = -0,0629840 \end{array}$$

Si trova poi sulle tavole  $0,0629840 = \sin 3^\circ 36' \frac{1935}{2903}$ . Ora essen-

do  $\frac{1935}{2903}$  così vicino al valore di  $\frac{2}{3}$ , che non v'è l'errore nemmeno d'una unità intera nell'ultima cifra del numero 1935, si potrà prendere 0,0629840 pel seno di  $3^\circ 36' 40''$  senza poter decidere colle tavole comuni, se vi sia pure l'errore di un minuto terzo. Quindi l'arco  $A'$ , che ha questo coseno negativo, sarà  $= 93^\circ 36' 40''$ , e di quest'arco sarà corda la distanza  $aZ$  posto  $BZ=18^\circ$ . Applicando dunque la distanza  $aZ$  presa sul compasso per corda alla circonferenza, si determinerà un tal arco  $= 93^\circ 36' 40''$ , assai prossimamente.

203. Per indagare l'errore, che sfugge ai numeri delle tavole comuni, si consideri, che essendo il seno di  $18^\circ$  eguale alla metà della corda della decima parte della circonferenza, cioè  $= \frac{1}{2}Ab = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ , e il coseno di  $45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ , l'equazione  $\cos A' = 2\sin A \cos 45^\circ - \frac{1}{2}$  del § 201 da  $\cos A' = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{5}-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{10}-\sqrt{2}) - \frac{1}{2} = 0,0629839824$ . Calcolato poi con più cifre anche il seno di  $3^\circ 36' 40''$ , si trova  $= 0,062984061154$ . Attenendosi solamente a otto cifre decimali, si trova  $\sin 3^\circ 36' 39'' = 0,06297921$ . La differenza per  $1''$ , ossia per  $60'''$  è 485. Se dunque 485 dà  $60'''$ , 8 darà  $\frac{96'''}{97}$ ; non darà dunque un intero minuto terzo. Dunque l'arco, del quale è corda la distanza  $aZ$ , non è maggiore di  $93^\circ 36' 40''$  di un intero minuto terzo.

204. Posto tutto ciò, ecco l'uso, che si potrebbe fare di questo valore per la divisione antica del cerchio. Lasciamo stare, (fig. 12) che potrebbe servire a dividere in tre un minuto primo

in que' cerchj, dove fossero notati i minuti primi, poichè si troverebbero i  $40''$ , cioè i  $\frac{2'}{3}$  tra un minuto primo e l'altro seguente, e ciò senza l'errore di un minuto terzo; esso può anche servire a trovare la terza parte di un grado. Poichè essendo l'arco  $cBN=90^\circ$  ed  $Np=3^\circ$  (§§ 31, 43), se preso  $BZ=Kp$ , nel qual caso riuscirà l'arco  $BZ=18^\circ$  (§ 32), col raggio  $aZ$ , fatto centro in  $c$  si descriverà un arco, esso taglierà la circonferenza tra  $p$  e  $P$  in un punto distante da  $p$  di  $36' 40''$  col piccolo errore calcolato. Si chiami  $y$  questo punto, e si triplichi per esempio l'arco  $Ny=3^\circ 36' 40''$ . Avremo un arco  $=10^\circ 50'$  senza l'errore di tre minuti terzi, e se questa triplicazione si è fatta da  $N$  verso  $G$ , caderà l'ultima divisione tra  $\pi$  e  $\varphi$ . Si chiami  $\eta$  il punto, dove esso cade, cosicchè  $N\eta=10^\circ 50'$ . Si chiami poi  $\mu$  il punto, che è alla metà dell'arco  $\pi\varphi$  ottenuto col § 58. Sarà l'arco  $\mu\eta=20'$  senza l'errore di tre minuti terzi, cioè si avrà ottenuto un terzo di grado antico con tanta precisione, ch'io non so, se abbiassi per la pratica a desiderarsene una maggiore.

205. Noi abbiamo tratto quest' esempio dalla lista di tutti i valori di  $\cos A'$  calcolati, introducendo nell'equazione (1) in luogo di  $A$  successivamente  $90^\circ$ ,  $88^\circ 30'$ ,  $87^\circ$ , e così in seguito fino a  $0^\circ$ , quindi  $-1^\circ 30'$ ,  $-3^\circ$  ecc. fino a  $-19^\circ 30'$  inclusivamente; oltre il qual caso non ha più luogo l'equazione (1) venendo i suoi valori maggiori di 1.

206. Ora proseguiremo a trovare le altre equazioni. Ogni distanza del punto  $b$  dai punti della circonferenza, riuscendo minore del diametro 2, potrà essere corda di un arco. Questo arco, di cui la  $bZ$  è corda si chiami  $B'$ ; si avrà  $\frac{1}{2} bZ = \text{sen} \frac{1}{2} B'$ , e chiamando  $B$  l'arco  $BZ$ , si avrà  $Zz = 2\text{sen} B$ , quindi dall'equazione (B) del § 197, divisa per 4, risulterà  $\text{sen}^2 \frac{1}{2} B' = \frac{1 - \cos B'}{2}$  (§ 156)  $= \frac{5 - \sqrt{5}}{8} + \text{sen} B \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ . Quindi  $\cos B' = 1 - \left( \frac{5 - \sqrt{5}}{4} \right) - \text{sen} B \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1 - 2\text{sen}^2 36^\circ - 2\text{sen} B \text{sen} 18^\circ = \cos 72^\circ - \cos(B - 18^\circ) + \cos(B + 18^\circ)$  (§§ 156, 159). Si avrà dunque

$$(2) \quad \cos B' = \text{sen} 18^\circ + \cos(B + 18^\circ) - \cos(B - 18^\circ).$$

207. Parimente se si chiami  $E'$  l'arco, del quale è corda la  $eZ$ , ed  $E$  l'arco  $BZ$ , si avrà dall'equazione (E) (§ 197)

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} E' = \frac{1 - \cos E'}{2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{4} - \operatorname{sen} E \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}. \text{ Quindi ne viene}$$

$$\begin{aligned} \cos E' &= \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + 2 \operatorname{sen} E \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \\ &= \operatorname{sen} 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ + 2 \operatorname{sen} E \operatorname{sen} 22^\circ 30'. \end{aligned}$$

Quindi finalmente

$$(3) \quad \begin{aligned} \cos E' &= \operatorname{sen} 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ + \cos(E - 22^\circ 30') \\ &\quad - \cos(E + 22^\circ 30'). \end{aligned}$$

208. Per via di queste tre equazioni coll'ajuto delle tavole dei seni e dei coseni naturali, dato un arco  $A$ ,  $B$  ed  $E$ , per via di semplici addizioni o sottrazioni, si avranno i coseni, e quindi gli archi  $A'$ ,  $B'$  ed  $E'$ , dei quali riescono corde le distanze  $aZ$ ,  $bZ$ ,  $eZ$ , le quali esse stesse si conosceranno duplicando il seno della metà degli archi  $A'$ ,  $B'$  ed  $E'$ .

209. Reciprocamente, se sia la distanza  $aZ$  eguale ad una corda d'un arco noto  $A'$ , e si cerchi di che arco diventerà corda la  $Zz$ , ossia di quanti gradi riuscirà l'arco  $BZ$ , che ne è la metà, ed è  $= A$ ; dall'equazione (§ 199)  $a^2 = 3 - 2 \operatorname{sen} A \cdot \sqrt{2}$ , si ricaverà  $\operatorname{sen} A = \frac{3 - a^2}{2\sqrt{2}}$ , e sostituendo il valore di  $a^2 = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A' =$

$$\begin{aligned} &= 2 - 2 \cos A' \quad (\S 156), \text{ avremo } \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos A' \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \\ &= \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ + \cos A' \operatorname{sen} 45^\circ, \text{ e quindi } (\S\S 157, 159) \text{ essendo} \\ &\operatorname{sen}(45^\circ + A') = \cos(45^\circ - A') \end{aligned}$$

$$(4) \quad \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} 45^\circ + \operatorname{sen}(45^\circ - A') + \cos(45^\circ - A')].$$

210. Istessamente se sia noto l'arco  $B'$ , di cui è corda la distanza  $bZ$ , e si cerchi l'arco  $B = \widehat{BZ}$  per via della  $Zz$ , che è corda di  $2B$ ; moltiplicando l'equazione (B) (§ 197) per  $\sqrt{5} + 1$ , per essere  $(bB)^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$  ed  $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ , avremo  $(bZ)^2 \cdot$

$$\begin{aligned} &(\sqrt{5} + 1) = 2\sqrt{5} + 4 \operatorname{sen} B, \text{ e sostituendo il valore di } (bZ)^2 = \\ &= 4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} B' = 2 - 2 \cos B' \quad (\S 156), \text{ si avrà dopo fatte le riduzioni} \\ &\operatorname{sen} B = \frac{1}{2} - 2 \cos B' \cdot \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \right). \text{ Ora essendo } Bb \text{ il lato del penta-} \end{aligned}$$

$$\text{gono} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \text{ corda di } 72^\circ, \text{ sarà } \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \operatorname{sen} 36^\circ. \text{ Quindi}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = \operatorname{sen}^2 36^\circ; \text{ quindi } 1 - \operatorname{sen}^2 36^\circ = \cos^2 36^\circ = \operatorname{sen}^2 54^\circ =$$



$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2; \text{ quindi risulterà } \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} - 2\cos B' \operatorname{sen} 54^\circ,$$

e finalmente (§ 157)

$$(5) \quad \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} 30^\circ - \operatorname{sen}(54^\circ + B') - \operatorname{sen}(54^\circ - B').$$

211. Nella stessa maniera se sia noto l'arco  $E'$ , di cui è corda la distanza  $eZ$ , e si cerchi il grado dell'arco  $BZ = E$ , eguale alla metà dell'arco, di cui è corda  $Zz = 2\operatorname{sen} E$ , sostituendo nell'equazione (E) (§ 197) il valore di  $(eZ)^2 = 2 - 2\cos E'$ , e gli altri valori di  $(eB)^2 = 3 - \sqrt{2}$ ;  $Ae = \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2\operatorname{sen} 22^\circ 30'$  (§§ 199, 38), avremo  $2\operatorname{sen} E \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2\cos E' + 1 - \sqrt{2}$ , e moltiplicando per  $\sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ , ne verrà  $4\operatorname{sen} E = 2\cos E' \cdot \sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} - (\sqrt{2} - 1) \sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2\cos E' \cdot \sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} - (2 - \sqrt{2}) \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2\cos E' \cdot \sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$  e dividendo per 4, e considerando, che è  $\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2\operatorname{sen} 67^\circ 30'$  (§ 37),  $\sqrt{2} = 2\operatorname{sen} 45^\circ$ , si avrà (§§ 157, 158, 159)  $\operatorname{sen} E = 2\cos E' \operatorname{sen} 67^\circ 30' \operatorname{sen} 45^\circ - \operatorname{sen} 22^\circ 30' \operatorname{sen} 45^\circ$ ; ossia  $\operatorname{sen} E = \cos E' [\cos(67^\circ 30' - 45^\circ) - \cos(67^\circ 30' + 45^\circ)] - \operatorname{sen} 22^\circ 30' \cdot \operatorname{sen} 45^\circ$ , ossia  $\operatorname{sen} E = \cos E' \cos 22^\circ 30' + \cos E' \operatorname{sen} 22^\circ 30' - \operatorname{sen} 22^\circ 30' \operatorname{sen} 45^\circ$  ossia finalmente

$$(6) \quad \operatorname{sen} E = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos(E' + 22^\circ 30') \\ + \operatorname{sen}(E' + 22^\circ 30') \\ + \operatorname{sen} 22^\circ 30' \\ + \cos(E' - 22^\circ 30') \\ - \operatorname{sen}(E' - 22^\circ 30') \\ - \cos 22^\circ 30' \end{array} \right\}$$

212. Così dalle tre equazioni (A), (B) ed (E) ne abbiamo ricavate sei, per mezzo delle quali da archi dati possiamo ricavare nuovi archi coll'ajuto dei soli tre punti  $a$ ,  $b$  ed  $e$  e insieme le nuove loro corde.

213. Potendo essere infiniti gli archi dati, sono ancora infiniti i casi di ciascuna di queste equazioni. Ma se non ci vogliamo prevalere che degli archi, che si possono trovare per mezzo degli stessi tre punti  $a$ ,  $b$  ed  $e$ , essi sarebbero 120 per ogni equazione, quando per alcuna di esse non vi fossero al-

cuni limiti particolari. Difatti potendosi per via di quei tre punti la circonferenza in 240 parti eguali (§ 57), e per conseguenza la semicirconferenza in 120, saranno 60 i punti  $Z$  e 60 i  $z$ , che presi insieme determinerebbero 120 casi per ogni equazione. Ma alcuna di esse avrà dei limiti particolari.

214. Per esempio s'io volessi prendere sul compasso la corda  $3^\circ$ , cioè della centovesima parte della circonferenza (§ 42), e collocando la punta del compasso in  $a$  segnare un arco, esso non potrebbe tagliare la circonferenza in alcun punto  $Z$ , essendo questa corda minore della distanza  $aF = \sqrt{2}-1$ . Non si potrà dunque nell'equazione (4) introdurre in luogo  $A'$  l'arco di  $3^\circ$ , e se ciò si volesse fare, ne verrebbe un valore maggiore dell'unità, cioè assurdo per  $\text{sen} A$ . Per vedere, quale sia il primo arco, che si potrà introdurre in luogo di  $A'$  tra gli archi della serie  $1^\circ 30'$ ,  $3^\circ$ ,  $4^\circ 30'$ , ecc., si osservi di che arco sia corda la distanza  $aF$ , che è la minima del punto  $a$  dal cerchio, ed è  $= \sqrt{2}-1 = 2\text{sen}45^\circ - \frac{1}{2} = 0,91421356 = \cos 23^\circ 54' +$ . Dunque il primo arco, che si possa adoperare di quelli, che si trovano per via dei tre punti  $a$ ,  $b$  ed  $e$ , sarà l'arco di  $24^\circ$ . Dietro ad esso poi si potranno adoperare tutti gli altri in serie  $25^\circ 30'$ ,  $27^\circ$ ,  $29^\circ 30'$ , ecc. sino al  $180^\circ$ ; poichè le corde di tutti questi possono essere distanze dal punto  $a$  da qualche punto  $Z$ , ovvero  $z$  della circonferenza.

215. Più limitate sono le equazioni (5) e (6). Poichè nella (5) non si possono impiegare archi  $B'$ , che abbiano la corda minore di  $bf$ , nè maggiore di  $bF$ ; egualmente nella (6) sono esclusi tutti gli archi  $E'$  di corda minore di  $eF$  e maggiore di  $ef$ .

216. Vedremo in seguito i casi, nei quali riescano utili alcuni di questi valori per la divisione del cerchio, o per qualche altro Problema, che non si possa sciogliere se non per approssimazione, scegliendo quelli da tutta la lista calcolata, che danno maggior avvicinamento al vero valore che si cerca, e nello stesso tempo si sciolgono con sezioni di archi meno lontane dall'angolo retto.

217. Intanto per ottenere tutti i vantaggi possibili dai tre punti  $a$ ,  $b$  ed  $e$  senza introdurre punti nuovi, ricaveremo dalle

tre equazioni (A), (B) ed (E) altre sei equazioni per avere nuovi valori di archi e di corde.

218. Se sia l'arco  $BZ$  un arco conosciuto, per esempio uno di quelli, che si ottengono coi Problemi del Secondo Libro, e si chiami  $B$ ; e si prenda la distanza  $bZ$  sul compasso, e si porti da  $a$  a qualche altro punto  $Z'$ , che determini un altro arco  $BZ'=A$ , si può ricavare dal confronto delle due equazioni (A) e (B) una nuova equazione, che lo faccia conoscere. Poichè se in quelle due equazioni si farà  $bZ=aZ'$ ; facendo nella (A)  $Zz=2\text{sen}A$ , e nella (B)  $Zz=2\text{sen}B$ , si avrà  $(aB)^2-2\text{sen}A \cdot Aa = (bB)^2+2\text{sen}B \cdot Ab$ , ossia  $3-2\text{sen}A \cdot \sqrt{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2} + \text{sen}B(\sqrt{5}-1)$

(§ 199), e liberando  $\text{sen}A$ , avremo  $\text{sen}A = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \sqrt{1/2} - 2\text{sen}B \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \sqrt{1/2} = \text{sen}54^\circ \text{sen}45^\circ - 2\text{sen}B \cdot \text{sen}18^\circ \cdot \text{sen}45^\circ$   
(§ 210)  $= \frac{1}{2}(\cos 9^\circ + \text{sen}9^\circ) - \text{sen}B \cdot (\cos 27^\circ - \text{sen}27^\circ)$  (§ 159); quindi (§ 156 e segg.)

$$(7) \quad \text{sen}A = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos 9^\circ + \text{sen}9^\circ \\ + \cos(B-27^\circ) \\ - \text{sen}(B-27^\circ) \\ - \cos(B-63^\circ) \\ + \text{sen}(B-63^\circ) \end{array} \right\}$$

219. Anche qui per  $B$  non si potranno prendere tutti gli archi, ma solamente quelli, che diano una distanza  $bZ$ , ovvero  $bz$  non minore di  $aF$ .

220. Ora se sia conosciuto un arco  $BZ$ , che si chiami  $A$ , e presa sul compasso la distanza  $aZ$  si porti essa da  $b$  a qualche punto  $Z'$  della stessa circonferenza, che determini l'arco  $BZ'=B$ ; si conoscerà quest'arco  $B$ , e la sua corda, se occorra, se nell'equazione  $\text{sen}A = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \sqrt{1/2} - 2\text{sen}B \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \sqrt{1/2}$  (§ 218) si libererà  $\text{sen}B$ . Si moltiplichi essa equazione pel fattore  $2(\sqrt{5}+1)\sqrt{2}$ , ed avremo  $2\text{sen}A \cdot (\sqrt{5}+1)\sqrt{2} = 3 + \sqrt{5} - 4\text{sen}B$ ; onde avremo  $\text{sen}B = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - 4\text{sen}A \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \sqrt{1/2} = 2\text{sen}^2 54^\circ - 4\text{sen}A \text{sen}54^\circ \cdot \text{sen}45^\circ$  (§ 210), e adoperate come sopra le equa-

zioni de' §§ 156 e seguenti, risulterà in fine

$$(8) \quad \text{sen} B = 1 + \text{sen} 18^\circ - \text{sen}(A + 9^\circ) + \cos(A + 9^\circ) - \text{sen}(A - 9^\circ) - \cos(A - 9^\circ).$$

221. In questa equazione (8) non si potranno impiegare per  $A$  quegli archi  $BZ$ , che danno una distanza  $aZ$  maggiore di  $bF$ .

222. Ora se nell'equazione (A) (§ 197) si faccia  $Zz = 2\text{sen} A$ , e nell'equazione (E) un'altra  $Zz = 2\text{sen} E$ ; facendo inoltre in queste due equazioni  $(aZ)^2 = (eZ)^2$ , si avrà dopo le sostituzioni dei valori (§ 199)  $3 - 2\text{sen} A \cdot \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} - 2\text{sen} E \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ;  $\text{sen} A = \frac{1}{2} + 2\text{sen} E \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 2\text{sen} E \text{ sen} 22^\circ 30' \text{ sen} 45^\circ = \frac{1}{2} + \text{sen} E \cos 22^\circ 30' - \text{sen} E \text{ sen} 22^\circ 30'$  (§ 159). Quindi finalmente (§§ 157 e 158).

$$(9) \quad \text{sen} A = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} +\text{sen}(E + 22^\circ 30') \\ +\cos(E + 22^\circ 30') \\ +\text{sen}(E - 22^\circ 30') \\ -\cos(E - 22^\circ 30') \end{array} \right\}$$

223. Quest'equazione nona si può anche preparare in altro modo, perchè il calcolo riesca più facile per mezzo de' seni, e coseni artificiali, i quali si sogliono trovare nelle tavole più facilmente di dieci in dieci secondi. Perchè essendo (§ 222)

$$\text{sen} A = \frac{1}{2} + 2\text{sen} E \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} + \text{sen} E \right) \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{2} = \left( \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + \text{sen} E \right) \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} : \sqrt{\frac{1}{2}} = (\text{sen} 67^\circ 30' + \text{sen} E) \frac{\text{sen} 22^\circ 30'}{\text{sen} 45^\circ} \quad (\S 37).$$

E facendo  $67^\circ 30' - p$ ;  $E = q$ ; si avrà

$$[9] \quad \text{sen} A = \frac{\text{sen} \frac{67^\circ 30' + E}{2} \cos \frac{67^\circ 30' - E}{2}}{\cos 22^\circ 30'}$$

La quale equazione sarà facile da calcolare per via de' logaritmi dei seni e de' coseni.

224. Se dunque prenderemo sul compasso una distanza del punto  $e$  da qualche punto  $Z$  estremo di un arco conosciuto  $BZ = E$ , e la porteremo da  $a$  a qualche altro punto  $Z'$  della circonferenza; conosceremo il nuovo arco  $BZ' = A$  per via dell'equazione (9), ovvero della [9]. Queste avranno i loro limiti,

poichè l'arco  $BZ$  dovrà essere tale, che non si abbia  $eZ$  minore di  $aF$ .

225. Avendosi dal § 222,  $2\text{sen}A \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\text{sen}E \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ; e si moltiplichino questa equazione per  $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}$ , avremo

$$2\text{sen}A \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + 2\text{sen}E \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} = 2\text{sen}A \cdot \text{sen}67^\circ 30' - \text{sen}67^\circ 30' \quad (\S 37); \text{ quindi } (\S 159)$$

$$(10) \quad \text{sen}E = \cos(A - 67^\circ 30') - \cos(A + 67^\circ 30') - \text{sen}67^\circ 30'.$$

226. Anche questa equazione decima si può preparare diversamente ad uso de' logaritmi. Poichè essendo  $\text{sen}E = (\text{sen}A - \frac{1}{2})2\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} = [\text{sen}A + \text{sen}(-30^\circ)]2\text{sen}67^\circ 30'$ , facendo  $A = p$ ;  $-30^\circ = q$  si avrà (§ 157)

$$[10] \quad \text{sen}E = 4\text{sen} \frac{A - 30^\circ}{2} \cos \frac{A + 30^\circ}{2} \text{sen}67^\circ 30'.$$

227. È chiaro, che tutti i valori dell'arco  $BZ$ , ovvero  $Bz = \pm A$ , che daranno  $aZ$  maggiore di  $ef$ , non si potranno introdurre nell'equazione decima, che quindi riceverà i suoi limiti.

228. Finalmente due altre equazioni si possono ottenere dal confronto dell'equazione (B) colla (E). Poichè se si piglia una distanza da  $e$  a qualche punto  $Z$  della circonferenza, che sia l'estremo d'un arco conosciuto  $BZ = E$ , e con questa distanza  $eZ$  presa per raggio, e fatto centro in  $b$  si segni un arco, che tagli la circonferenza in qualche altro punto  $Z'$ , che determini l'arco  $BZ' = B$ ; si conoscerà quest'arco per via del suo seno nel modo seguente. Fatto nell'equazione (B) (§ 197),  $Zz = 2\text{sen}B$  e nell'equazione (E),  $Zz = 2\text{sen}E$ , e fatto in esse  $bZ = eZ$ , si avrà dopo la sostituzione dei valori (§ 199)  $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} + \text{sen}B \cdot (\sqrt{5} - 1) = 3 - \sqrt{2} - 2\text{sen}E \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ; donde si ricava  $2\text{sen}B \cdot (\sqrt{5} - 1) = \sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{2} - 4\text{sen}E \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ; e moltiplicando da tutte due le parti per  $\frac{\sqrt{5} + 1}{8}$ , avremo

$$\text{sen} B = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - 4 \text{sen} E \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

$= 2 \text{sen}^2 54^\circ - 2 \text{sen} 54^\circ \text{sen} 45^\circ - 4 \text{sen} E \cdot \text{sen} 22^\circ 30' \text{sen} 54^\circ$ . (§ 210);  
e quindi (§ 159)

$\text{sen} B = 1 - \cos 108^\circ - \cos 9^\circ - \text{sen} 9^\circ - 2 \text{sen} E (\cos 31^\circ 30' - \cos 76^\circ 30')$ ,  
e quindi (§ 157)

$$(11) \quad \text{sen} B = 1 + \text{sen} 18^\circ - \cos 9^\circ - \text{sen} 9^\circ - \text{sen}(E + 31^\circ 30') \\ - \text{sen}(E - 31^\circ 30') + \text{sen}(E + 76^\circ 30') + \text{sen}(E - 76^\circ 30').$$

229. Anche quest'equazione (11) avrà limiti da due capi.  
Poichè la distanza minima  $eF = 1 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}$  è minore della di-  
stanza  $bf = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ , e la massima  $ef$  è maggiore della  $bF$ .

230. Se l'equazione

$$2 \text{sen} B (\sqrt{5} - 1) = \sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{2} - 4 \text{sen} E \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

trovata qui sopra § 228 si moltiplichi per  $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}$ , si avrà

$$\text{sen} E = 2 \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \\ - 4 \text{sen} B \cdot \frac{(\sqrt{5} - 1)}{4} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 2 \text{sen} 54^\circ \text{sen} 67^\circ 30' \text{sen} 45^\circ \\ - \text{sen} 67^\circ 30' - 4 \text{sen} B \cdot \text{sen} 18^\circ \text{sen} 67^\circ 30' \text{sen} 45^\circ \\ = \text{sen} 67^\circ 30' (\cos 9^\circ + \text{sen} 9^\circ) - \text{sen} 67^\circ 30' - 2 \text{sen} B \text{sen} 67^\circ 30' (\cos 27^\circ \\ - \text{sen} 27^\circ) = \frac{1}{2} (\text{sen} 76^\circ 30' - \cos 76^\circ 30' + \text{sen} 58^\circ 30' + \cos 58^\circ 30') \\ - \text{sen} 67^\circ 30' - \text{sen} B (\text{sen} 85^\circ 30' + \text{sen} 40^\circ 30' - \cos 40^\circ 30' - \cos 85^\circ 30'); \\ \text{donde si ha finalmente}$$

$$(12) \quad \text{sen} E = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{l} \text{sen} 76^\circ 30' - \cos 76^\circ 30' \\ + \text{sen} 58^\circ 30' + \cos 58^\circ 30' \end{array} \right) - \text{sen} 67^\circ 30' \\ - \frac{1}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(85^\circ 30' - B) + \text{sen}(85^\circ 30' - B) \\ - \cos(85^\circ 30' + B) - \text{sen}(85^\circ 30' + B) \\ + \cos(40^\circ 30' - B) + \text{sen}(40^\circ 30' - B) \\ - \cos(40^\circ 30' + B) - \text{sen}(40^\circ 30' + B) \end{array} \right)$$

La quale equazione non ha limiti.

231. Se per accidente qualcuno dei valori, che si trovano  
con queste dodici equazioni, si trovi a prima giunta prossimo



a qualche valore utile e cercato nella soluzione de' Problemi; avremo il vantaggio di arrivare all'intento per una via semplicissima. Poichè non si avranno ad impiegare altri punti presi fuori della circonferenza, che i soli tre già rimarcati tante volte  $a$ ,  $b$  ed  $e$ , e nella circonferenza qualcuno di quelli, che servono alla divisione esatta della circonferenza per via delle soluzioni dei Problemi del lib. II. Passiamo dunque oramai a darne varj esempj.

232. E prima vedremo come si possa dividere il cerchio alla maniera antica in gradi e minuti, senza l'errore di secondi. Per far questo (fig. 12) supporremo, che la circonferenza del cerchio  $B D d$  sia divisa in dugento quaranta parti (§§ 57, 58), ciascuna delle quali come la  $P d$  contiene  $1^\circ 30'$ , e che la numerazione positiva cominci da  $B$  verso  $F$ , e una simile numerazione negativa vada da  $B$  verso  $f$ , e sieno i punti  $Z$  e  $Z'$  punti vaghi, che non hanno per ora altra condizione, se non che si trovino tra  $B$  ed  $F$  sulla circonferenza; e istessamente i punti  $z$  e  $z'$  tra  $B$  ed  $f$ . Questo lo facciamo a scanso delle troppe figure, che bisognerebbero se se ne replicasse una ad ogni Problema. Inoltre la minutezza delle divisioni appena le lascerebbe scorgere anche in figure molto maggiori della fig. 12.

233. *Prob.* Trovare l'arco d' un grado antico, ossia di  $1^\circ$ , senza l'errore di mezzo secondo (fig. 12).

*Sol. I.* Sia l'arco  $Bz = -55^\circ 30'$  (§ 232). Si prenda sul compasso la distanza  $bz$ , e fatto centro in  $e$  si segni un arco, che tagli la circonferenza in un punto  $Z$ . Sarà l'arco  $BZ = 52^\circ 59' \frac{1739}{1751}$ , cioè di  $53^\circ$ , senza che vi manchino venticinque minuti terzi. Si ha poi nelle divisioni da  $B$  verso  $F$  eseguite col Problema § 42 l'arco di  $54^\circ = \frac{18}{120}$ . Si avrà dunque anche l'arco  $54^\circ - 53^\circ = 1^\circ$  colla approssimazione, che si voleva.

*Dim.* Se nell'equazione (12) si faccia  $B = -55^\circ 30'$ , risulta in fine del calcolo  $\text{sen} E = 0,7986343 = \text{sen} 52^\circ 59' \frac{1739}{1751}$ .

*Sol. II.* Sia l'arco  $BZ = 10^\circ 30'$ . Colla distanza  $bZ$  presa per raggio, e col centro  $a$  si descriva un arco, che tagli la circonferenza in un altro punto  $Z'$ . Sarà l'arco  $BZ' = 29^\circ 29'$

$\frac{2511}{2532}$  cioè  $= 29^{\circ} 30'$  senza l'errore di mezzo secondo. Si trova

poi nelle divisioni del § 58 l'arco di  $28^{\circ} 30' = \frac{19}{240}$  della circonferenza. Dunque si avrà la differenza de' due archi eguale a  $1^{\circ}$  coll'approssimazione voluta.

*Dim.* Se nell'equazione (7) si ponga  $B = 10^{\circ} 30'$ , risulterà in fine del calcolo  $\text{sen} A = 0,4924215 = \text{sen} 29^{\circ} 29' \frac{2511}{2532}$ . Mancherà dunque la differenza degli archi dal valore di un grado di  $29'''$ .

234. Questa seconda Soluzione è meno prossima della prima di 5 minuti terzi, ma le sezioni degli archi si fanno in questa ad un angolo più vicino al retto.

235. Avendosi l'arco di  $1^{\circ} 30'$  (§ 226), ed essendosi trovato l'arco di  $1^{\circ}$  (§ 227), si avrà per sottrazione anche l'arco di  $30'$ , ossia il mezzo grado, e quindi si avrà modo di dividere tutta la circonferenza in mezzi gradi senza accumulare errori, e senza che alcun punto sia lontano dal suo vero sito di mezzo secondo.

236. *Prob.* Trovare l'arco di un quarto di grado, ossia di  $15'$ , senza l'errore di un minuto terzo.

*Sol.* Sia l'arco  $Bz = -12^{\circ}$ , la distanza  $ez$  sarà eguale alla corda di  $87^{\circ} 15'$ . Se dunque si piglierà sul compasso, e fatto centro in  $B$  si taglierà l'arco  $BF$  in un punto  $Z'$ , sarà l'arco  $BZ' = 87^{\circ} 15'$ . Si ha poi dalle divisioni del § 42 l'arco di  $87^{\circ} = \frac{29}{120}$  della circonferenza. Si avrà dunque la differenza de' due archi  $= 15'$

*Dim.* Se nell'equazione (3) (§ 207)  $\cos E' = \text{sen } 45^{\circ} - \text{sen } 30^{\circ} + \cos(E - 22^{\circ} 30') - \cos(E + 22^{\circ} 30')$  si ponga  $E = -12^{\circ}$ , si avrà

$$\text{sen} 45^{\circ} - \text{sen} 30^{\circ} = 0, 2071068$$

$$\cos(-34^{\circ} 30') = 0, 8241262$$

$$- \cos 10^{\circ} 30' = -1 + 0167451$$

$$\cos E' = 0, 0479781$$

Ora nelle tavole, che danno i seni naturali con sette cifre, si trova  $0, 0479781 = \cos 87^{\circ} 15'$  senza alcuna varietà nemmeno nell'ultima cifra. Impiegando poi più decimali si trova

$$\cos E' = 0,0479780622; \cos 87^{\circ} 15' = 0,047978128520.$$

Impiegando sole otto cifre decimali si ha

$$\cos 87^{\circ} 15' 1'' = 0,04797229.$$

Si ha dunque per  $1''$  la differenza 584. Se 584 dà di differenza  $60'''$ , 7 darà  $\frac{106}{146}$  di minuto terzo. Sarà dunque l'arco  $E'$ , del quale è corda la  $eZ'$ , di  $87^{\circ} 15'$  con una mancanza minore di un minuto terzo.

237. Si potrà per mezzo di questo Problema dividere la circonferenza in 1440 parti, cioè in tanti quarti di grado, senz'chè vi sia in alcun punto di divisione l'errore di tre minuti terzi. Poichè fatte sopra ogni arco  $P\delta$  di  $1^{\circ} 30'$  tre divisioni di  $15'$  in  $15'$  da  $P$  verso  $\delta$  e due da  $\delta$  verso  $P$ , resterà l'arco  $P\delta$  diviso in sei parti, ciascuna delle quali sarà di un quarto di grado senza l'errore indicato nella posizione di alcun punto di divisione. Così nel resto della circonferenza. Quindi innanzi supporremo la circonferenza divisa in gradi e quarti, che per semplicità del calcolo supporremo esatti. Si potrà tener conto dei loro errori, qualor si voglia.

238. *Prob.* Trovare un arco di  $10'$ , ossia la sesta parte di un grado senza l'errore di  $10'''$ , ossia della sesta parte d' un secondo.

*Sol.* Sia l'arco  $Bz = -49^{\circ} 30'$ ; sarà la distanza  $bz$  eguale alla corda dell'arco  $38^{\circ} 50'$ , senza l'errore indicato. Sottraendo poi l'arco  $38^{\circ} 50'$  dall'arco  $39^{\circ} = \frac{13}{120}$  della circonferenza, che si ha col § 42, rimarrà l'arco di  $10'$ .

*Dim.* Se nell'equazione (2) si porrà  $B = -49^{\circ} 30'$ , ne verrà  $\cos B' = 0,7789738 = \cos 38^{\circ} 49' \frac{1819}{1824}$ . Si ha dunque  $B' = 38^{\circ} 50'$  col difetto di  $9'''$ .

239. Sottraendo da un arco di  $50'$  mancante di  $9'''$  un arco di  $45'$  (§ 237) mancante di qualche minuto terzo, si avrà l'arco di  $5'$ , ossia la dodicesima parte del grado senza l'errore di  $9'''$ .

240. *Prob.* Trovare l'arco di  $6'$ , ossia un decimo di grado senza l'errore di  $13'''$ .

*Sol.* Sia l'arco  $BZ = 45^{\circ}$ , cioè sia l'arco  $BG$ . Si prenda sul compasso la distanza  $BG$ , e fatto centro in  $b$  si tagli la circonferenza in  $z$ . Sarà l'arco  $Bz = -40^{\circ} 6'$ , senza l'errore indicato. Sottraendo l'arco di  $-40^{\circ}$  (§ 237), resterà l'arco di  $6'$ .

*Dim.* Se nell'equazione (5) si ponga  $B' = 45^{\circ}$ ; ne verrà

$\text{sen} B = -0,6441228 = \text{sen}(-40^\circ 5' \frac{2217}{2225})$ . Sarà dunque l'arco  $B = Bz = -40^\circ 6'$  col difetto di  $12''$ .

241. Sottraendo dall'arco di  $6'$  (§ 240) l'arco di  $5'$  (§ 239), rimarrà l'arco di  $1'$  coll'errore di pochi minuti terzi. Ma si può trovare quest'arco immediatamente col seguente

242. *Prob.* Trovare immediatamente l'arco di  $1'$  senza l'errore di 22 minuti terzi.

*Sol.* Sia l'arco  $Bz = -27^\circ$ . Si prenda sul compasso la distanza  $bz$  coma raggio, e fatto centro in  $e$  si tagli la circonferenza in  $Z$ . Sarà l'arco  $BZ = 29^\circ 59'$  coll'eccesso di 10 minuti terzi. Essendo dunque l'arco  $BN = 30^\circ$  (§ 31) sarà l'arco  $ZN = 1'$  mancante di  $10''$ .

*Dim.* Se nell'equazione (12) si ponga  $B = -27^\circ$ , si avrà  $\text{sen} E = 0,4997496 = \text{sen} 29^\circ 59' \frac{15}{2519}$ . Dunque ecc.

243. *Prob.* Trovare l'arco di  $9'$  senza l'errore di 7 minuti terzi.

*Sol.* Colla distanza  $bK$  presa per raggio, e col centro  $e$  si segni un arco, che tagli la circonferenza in  $z$ . Sarà l'arco  $Bz = -4^\circ 21'$  coll'eccesso di 6 minuti terzi che sottratto da  $-4^\circ 30'$  lascia  $9'$  senza l'errore indicato.

*Dim.* Se nell'equazione (12) si faccia  $B = 15^\circ = BK$  (§ 32), si avrà  $\text{sen} E = -0,0758494 = \text{sen}(-4^\circ 21' \frac{5}{2901})$ . Sarà dunque l'arco  $Bz = -4^\circ 21' 0'' 6''$ .

Questo Problema servirà ancora alla nuova divisione del cerchio, come vedremo (§ 257).

244. L'arco di  $15'$  mancante meno di un minuto terzo (§ 236), quello di  $10'$  crescente meno di  $10''$  (§ 238), quello di  $6'$  mancante meno di  $13''$  (§ 240), quello di  $1'$  mancante meno di  $22''$  (§ 242), quello di  $9'$  mancante meno di  $7''$  (§ 243) si potranno combinare in modo per addizione o sottrazione senza accumulare molto gli errori, che in fine risulti tutta la circonferenza divisa in gradi e minuti primi senza l'errore che di pochissimi minuti terzi. Poichè raddoppiando per esempio l'arco di  $9'$ , avremo un arco di  $18'$  mancante meno di  $14''$ , dal quale sottraendo l'arco di  $6'$  mancante meno di  $13''$  avremo l'arco di  $12'$  mancante di circa un minuto terzo.

Sottraendo ora quest'arco dall' arco di 15' mancante meno di 1''' (§ 236), avremo l'arco di 3' coll'errore di un minuto terzo appena. Con questo si potrà dividere in cinque parti ogni arco di 15', e resterà divisa tutta la circonferenza di tre in tre minuti primi coll'errore minore di sei minuti terzi per conto di quest' ultima divisione, il quale errore, se si porrà sul verso contrario all'errore di tre minuti terzi al più, che si commette sulla divisione di 15' in 15' (§ 236), diverrà anche minore. Quindi impiegando l' arco di 1' mancante meno di 4''' (§ 241) a dividere ogni arco di 3', non si verrà mai a commettere un errore di 10''', e si avrà divisa tutta la circonferenza in gradi, e minuti primi.

Si potrebbero anche combinare questi, o altri archi cavati dalle dodici equazioni superiori, in guisa che si venisse a commettere minore errore, e noi impiegheremmo in questo alquanto Problemi, se per una parte questa divisione del cerchio in 360° non dovesse antiquarsi, e se per l' altra credessimo, che gli artefici, che ancora la volessero usare, trovassero opportune per la pratica tali ricerche. Non vogliamo però omettere i seguenti Problemi, supponendo adesso, che si sia diviso il cerchio intero in gradi antichi e minuti, che per semplicità supporremo esatti.

245. *Prob.* Trovare l'arco di 20'', ossia un terzo di minuto, crescente di 1''' appena.

*Sol. I.* Pel § 202 si trova l'arco di 40' crescente meno di un minuto terzo. Quindi anche l' arco di 20' complemento al 1' mancante meno di un minuto terzo.

*Sol. II.* Presa sul compasso la corda dell'arco 61° 30' come raggio, e fatto centro in *e* si descriva un arco, che tagli la circonferenza in *Z*. Sarà l'arco  $BZ = 20^{\circ} 39' 40''$  crescente di un minuto terzo appena. Quindi sottraendo quest' arco dall' arco 20° 40', si avrà l'arco di 20'' mancante appena di 1'''.

*Dim.* Se nell'equazione (6) si ponga  $E = 61^{\circ} 30'$ , adoperando tavole più copiose di seni, si avrà

$$\text{sen} BZ = \text{sen } E = 0,35283991; \text{ si ha poi}$$

$$\text{sen} 20^{\circ} 39' 40'' = 0,35283984$$

$$\text{Ora } \log 0,3528399 = 9, 5475777$$

$$\log \text{sen} 20^{\circ} 39' 40'' = 9, 5475776$$

$$\begin{aligned}\log \operatorname{sen} 20^{\circ} 39' 50'' &= 9, 5476334 \\ \text{differenza} &= 558\end{aligned}$$

Dunque  $E$  crescerà sopra l'arco  $20^{\circ} 39' 40''$  di  $\frac{10''}{558}$  circa, cioè di  $1''$  e poco più.

246. *Prob.* Trovare l'arco di  $15''$ , ossia un quarto di minuto, mancante di  $10''$  circa.

*Sol.* Si prenda per raggio sul compasso la corda di  $31^{\circ} 30'$ , e fatto centro in  $e$  si tagli la circonferenza in punto  $Z$ . Sarà l'arco  $BZ = 57^{\circ} 30' 15''$  mancante di  $9''$ .

*Dim.* Se nell'equazione (6) s'introduca  $E' = 31^{\circ} 30'$ , si trova  $E = 57^{\circ} 30' \frac{386}{1563}$ . Ma si ha  $\frac{392'}{1568} = \frac{1}{4}$ . Dunque la mancanza è di  $\frac{4}{1563}$  circa, cioè di  $10''$  circa.

247. *Prob.* Trovare l'arco di  $12''$ , ossia un quinto di minuto, mancante di  $1''$  circa.

*Sol.* Sia l'arco  $Bz = -10^{\circ} 30'$ . Presa sul compasso per raggio la distanza  $bz$ , e fatto centro in  $a$  si tagli la circonferenza in  $Z$ . Sarà l'arco  $BZ = 40^{\circ} 40' 12''$  colla mancanza di  $1''$  circa.

*Dim.* Se nell'equazione (7) si ponga  $B = -10^{\circ} 30'$ , risulterà dal calcolo  $A = 40^{\circ} 40' \frac{440}{2206}$ . Ora si ha  $\frac{441}{2205} = \frac{1}{5}$ . Si ha dunque la mancanza di  $\frac{1}{2206}$  cioè di  $1''$  circa.

Se si calcolasse con tavole più copiose, si rileverebbe più precisamente l'errore.

248. *Prob.* Trovare l'arco di  $10''$ , ossia di un sesto di minuto primo, crescente di  $1''$  circa.

*Sol.* Sia l'arco  $Bz = -24^{\circ}$ . Presa sul compasso per raggio la distanza  $ez$ , e fatto centro in  $a$  si segni un arco, che tagli la circonferenza in  $Z$ . Sarà l'arco  $BZ = 16^{\circ} 15' 10''$  coll'errore indicato.

*Dim.* Se nell'equazione (9) si ponga  $E = -24^{\circ}$ , ne verrà per risultato  $\log \operatorname{sen} A = 9,4469652$ . Questo si trova essere logaritmo del seno di  $16^{\circ} 15' 10'' \frac{20}{722}$ . L'eccesso dunque non arriva a due minuti terzi.



249. *Prob.* Trovare l'arco di  $5'$ , ossia d'una duodecima di minuto primo, senza l'errore sensibile alle tavole comuni e minore di  $2''$ .

*Sol. I.* Sia l'arco  $BZ = 4^\circ 30'$ . Si prenda sul compasso per raggio la distanza  $eZ$ , e fatto centro in  $a$  si segni un arco, che tagli la circonferenza in un altro punto  $Z'$ . Sarà l'arco  $BZ' = 32^\circ 51' 5''$  senza l'errore indicato.

*Dim.* Se nell'equazione (9) si ponga  $E = 4^\circ 30'$ , risulterà  $\log \operatorname{sen} A = 9,7343692$ ; ora  $\log \operatorname{sen} 32^\circ 51' = 9,7343529$ ; e la differenza è 163; la differenza poi nelle tavole per dieci minuti è 326 doppia in punto di 163. Dunque ecc.

Calcolato l'errore con tavole più copiose risulta minore di  $2'''$ .

*Sol. II.* Sia l'arco  $BZ = 31^\circ 30'$ . Si prenda sul compasso per raggio la distanza  $eZ$ , e col centro  $a$  si tagli la circonferenza in un altro punto  $Z'$ . Sarà l'arco  $BZ' = 51^\circ 30' 55''$  col difetto minore di un minuto terzo.

*Dim.* Se nell'equazione (9) si ponga  $E = 31^\circ 30'$ , risulterà per via delle tavole comuni  $\log \operatorname{sen} A = 9,8936365 = \log \operatorname{sen} 51^\circ 30' 50'' \frac{84}{167}$ . Il qual rotto  $\frac{84}{167}$  riferendosi a  $10'$  darà  $5''$  coll'eccesso minore di  $1'''$ . Sarà dunque  $A = 51^\circ 30' 55''$ , il qual arco sottratto da  $51^\circ 31'$  lascerà  $5''$  col difetto indicato.

Ma è tempo di passare a dimostrare qual uso si possa fare delle dodici equazioni poste sopra volendo dividere la circonferenza del cerchio alla nuova maniera de' Francesi.

250. Secondo questa maniera la circonferenza vien divisa in 400 gradi, acciocchè il quadrante, che è fondamento di tutta la trigonometria, resti diviso in 100 gradi. Ogni grado vien diviso in 100 minuti primi, ogni minuto primo in 100 secondi, e così via via. La natura delle decimali dispensa, se un vuole, dal nominar gradi, minuti, o secondi, intendendosi abbastanza la natura del rotto dal posto delle decimali.

251. Quindi ne viene, che nove gradi antichi vagliano 10 gradi moderni, ossia è  $9^\circ = 0,10$ , che  $54' = 0,01$ ; che  $27' = 0,005$ ; che  $5' 24'' = 0,001$ ; che  $32'' 24''' = 0,0001$ ; cioè che un grado moderno vale 54 minuti primi antichi, che un minuto moderno vale  $32'' 24'''$  dell'antica divisione, ecc.

252. Le divisioni accurate ottenute per via dei tre punti  $a$ ,  $b$  ed  $e$  nel Secondo Libro danno fino ad una  $240^{\text{ma}}$  della circonferenza (§ 59). L'arco, che la forma, è nella divisione antica di  $1^{\circ} 30'$  in punto. Esso non si esprime egualmente con un numero finito di cifre decimali nella divisione moderna. Il primo arco che si formi coll'aggregare delle  $240^{\text{ma}}$ , e che si esprima con un numero finito di decimali del quadrante, è l'arco di  $\frac{3}{240}$ , ossia di  $\frac{1}{80}$  della circonferenza, il quale è di  $4^{\circ} 30' = 0,05$  del quadrante, cioè di 5 gradi della nuova divisione. Si può dunque coi metodi del Secondo Libro, e per via dei soli tre punti  $a$ ,  $b$  ed  $e$  presi fuori della circonferenza, dividerla in parti eguali di cinque gradi moderni ciascuna, e ciò con precisione geometrica, il che è già molto vantaggio di questa Geometria.

253. Si potrebbe, se si volesse, colla bissezione degli archi (§ 60) dividere in seguito la circonferenza in archi di due gradi e mezzo ciascuno, ossia di 0,025, quindi proseguire la bissezione, ma con essa non si potrà avere, come è chiaro, un grado precisamente. Non resta dunque mezzo alla Geometria per ottenere l'arco d'un grado (§ 63), e solo è da cercarsi qualche costruzione, che lo dia almeno prossimamente.

254. *Prob.* Trovare l'arco d'un nuovo grado, ossia di 0,01 senza l'eccesso d'un sesto di minuto secondo della nuova divisione, ossia di tre minuti terzi della vecchia.

*Sol.* Si pigli sul compasso la corda di  $138^{\circ}$  gradi della divisione vecchia, ossia di quarantasei centovesime parti della circonferenza (§ 42), e fatto centro in  $a$  si segni un arco, che tagli il quadrante  $Bf$  in un punto  $z$ . Sarà l'arco  $Bz$  undici gradi della nuova divisione, dal quale sottraendo l'arco di  $9^{\circ} = 0,10$  (§ 252), resterà un arco  $= 0,01$  coll'eccesso piccolissimo indicato.

*Dim.* Se nell'equazione (4) si ponga  $A' = 138^{\circ}$ , avremo  $\text{sen} A = \frac{1}{2} [\text{sen} 45^{\circ} + \text{sen} 183^{\circ} + \text{sen} (-93^{\circ})] = \frac{1}{2} (\text{sen} 45^{\circ} - \text{sen} 3^{\circ} - \text{sen} 87^{\circ})$

Si ha poi	$-\text{sen } 3^{\circ} = -0,0523360$
	$-\text{sen} 87^{\circ} = -0,9986295$
	$\text{sen} 45^{\circ} = 1 - 2928932$

---


$$-0,3438587$$

$$-0, 1719293$$

Si ha poi

$$\text{sen } 9^{\circ} 57' = 0, 1719291$$

$$\text{sen } 9^{\circ} 58' = 0, 1722156$$

Abbiamo dunque l'arco  $Bz = A = 9^{\circ} 57'$  col solo eccesso di  $\frac{2}{2865}$  di un minuto primo della vecchia divisione, cioè senza l'eccesso di  $4'''$ , e quindi senza l'errore di un sesto di minuto secondo della nuova divisione.

255. Si potrebbe con tavole alquanto più ampie delle comuni indagare più precisamente un tale errore. In qualunque modo egli è così piccolo, che anche accumulandolo due o tre volte non riuscirebbe sensibile nemmeno nei maggiori quadranti. Ora non ci sarà di bisogno d'accumularlo più di due volte nella divisione di essi. Poichè si ha già con precisione geometrica l'arco di  $0,05$  (§ 252). Se in questo si segnano due divisioni di un grado cominciando dai due estremi, e venendo sul verso contrario, si avranno segnati su quest'arco quattro punti, che ne daranno la divisione in cinque gradi, e ciascuno di questi punti non sarà lontano dalla sua vera posizione di sei interi minuti terzi della divisione vecchia, ossia di un terzo di minuto secondo della nuova.

256. In vigore di questo Problema si supporrà ora divisa la circonferenza nei 400 gradi della nuova divisione.

257. *Prob.* Trovare l'arco di un nuovo mezzo grado senza l'eccesso di sette minuti terzi della divisione vecchia, ossia di un terzo di minuto secondo della nuova.

*Sol.* Si prenda sul compasso la distanza del punto  $b$  dal punto  $K$ , e con questo raggio  $bK$  fatto centro in  $e$  si segni un arco, che tagli la circonferenza in un punto  $z$ . Sarà l'arco  $Bz = -4^{\circ} 21'$  coll' eccesso minore di  $7''$ . Si sottragga da esso un arco di  $3^{\circ} = Np$  (§ 43). Si avrà di residuo  $1^{\circ} 21'$ , cioè un grado e mezzo della nuova divisione, colla corda del quale presa per raggio, e facendo centro in tutti i punti dei gradi (§ 256) si potranno dividere per metà tutti gli stessi gradi.

*Dim.* Se nell'equazione (12) s'introduca  $B = BK = 15^{\circ}$  (§ 32): risulterà  $E = -4^{\circ} 21' \frac{5}{2901}$ . Dunque ecc. (§ 243).

258. *Prob.* Trovare l'arco di un quinto di grado nuovo senza l'eccesso di un minuto secondo vecchio.

*Sol.* Presa sul compasso la corda di  $51^\circ$ , e fatto centro in  $e$  si segni un arco, che tagli il quadrante in  $Z$ ; sarà l'arco  $BZ$  di trentasette gradi nuovi coll'aggiunta di un quinto di grado col piccolo errore indicato.

*Dim.* Se nell'equazione (6) si faccia  $E'=51^\circ$ , si avrà  $E=$   
 $=33^\circ 28' \frac{1968}{2426} = 33^\circ 28' 48' \frac{1632}{2426}$ . Ma  $33^\circ 28' 48' = 0,372$ . Dunque ecc.

259. *Prob.* Trovare l'arco di quattro decime di un nuovo grado senza l'eccesso di  $16'''$  antichi.

*Sol.* Sia l'arco  $BV=76^\circ 30'$ , e si prenda un'apertura di compasso  $=bZ$ , colla quale fatto centro in  $a$  si segni un arco, che tagli il quadrante in un punto  $Z'$ . Sarà l'arco  $BZ'=0,094$ , cioè a nove gradi nuovi, e quattro decime coll'eccesso indicato.

*Dim.* Se nell'equazione (7) s'introduca  $B=76^\circ 30'$ ; ne verrà  
 $A=8^\circ 27' \frac{1738}{2877}$ . Ma  $8^\circ 27' \frac{1726}{2877} = 0,094$ . Dunque ecc.

260. *Prob.* Dividere un grado della nuova divisione in dieci parti eguali.

*Sol.* Avendolo diviso per metà per via del § 257, si sottraggono dall'arco di 0,005 gli archi di 0,004 (§ 259) e di 0,002 (§ 258), e si avranno gli archi di 0,001, e di 0,003 con l'errore di soli minuti terzi della vecchia divisione. Si avranno dunque tutti gli archi per la divisione dell'arco di 0,005 in cinque parti, e quindi dividendo similmente l'altra metà del grado, resterà diviso tutto in dieci parti eguali.

361. Si potranno fare sottrazioni e somme de' suddetti archi in modo, che contrapponendo gli eccessi ai difetti ne risulti una millesima quasi esatta. Si potrà quindi innanzi supporre diviso il quadrante in millesime, ossia di dieci in dieci nuovi minuti. Questi si supporranno esatti per semplicità del calcolo.

262. *Prob.* Trovare l'arco d'un nuovo minuto senza l'errore di un vecchio minuto terzo.

*Sol.* Sia un arco  $Bz=-1^\circ 30'$ . La distanza  $az$  sarà corda

di un arco di 1,3609 senza l'errore indicato. Sottraendo quest'arco dall'arco di 1,361 (§ 260), si avrà l'arco di 0,0001.

*Dim.* Se nell'equazione (1) si ponga  $A = -1^{\circ} 30'$ , risulta  $A' = 122^{\circ} 28' \frac{2111}{2454} = 122^{\circ} 28' 51'' 36''' = 1,3609$  (§ 251). Dunque ecc.

263. *Prob.* Trovare l'arco di due nuovi minuti senza l'errore di un vecchio minuto terzo.

*Sol.* Sia l'arco  $Bz = -48^{\circ}$ . La distanza  $bz$  sarà corda di un arco di 0,4422 colla precisione indicata. Da quest'arco sottraendo l'arco di 0,442 (§ 260), resterà l'arco di 0,0002.

*Dim.* Se nell'equazione (2) si ponga  $B = -48^{\circ}$ , risulta  $B' = 39^{\circ} 47' \frac{1639}{1862} = 39^{\circ} 47' 52'' 48''' = 0,4422$  (§ 251). Dunque ecc.

264. *Prob.* Trovare l'arco di tre nuovi minuti senza l'errore di un nuovo minuto terzo.

*Sol.* Sia un arco  $Bz = -78^{\circ}$ . Colla distanza  $ez$  presa per raggio, e fatto centro in  $a$  si segni un arco, che tagli il quadrante  $Bf$  in un punto  $z'$ . Sarà l'arco  $Bz' = -0,0187$  senza l'errore indicato. Se si sottrae quest'arco dall'arco  $= -0,019$  (§ 260), resterà l'arco  $= -0,0003$ .

*Dim.* Se nell'equazione [9] si ponga  $E = -78^{\circ}$ , risulta negativo il seno di  $A$ . Se si cambiano i segni ai due membri dell'equazione, risulta  $\log.\text{sen}A = 8,4678991$ . Ora nelle nuove Tavole del Callet per la nuova divisione del cerchio si trova  $8,467 : 8990 = \log.\text{sen}0,0187$ . Da  $\log.\text{sen}A = 8,4678991$

si sottr.  $DS = 6.1960574$  (*Vedi Callet*)

si avrà  $2.2718417 = \log.187,0000$ .

Si ha dunque  $A = -0,018700004$ . L'errore si trova anche minore, se s'impiegano più cifre nei logaritmi.

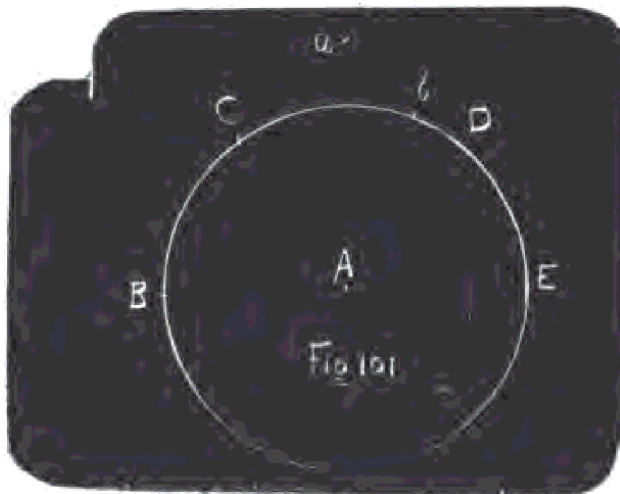
265. La somma approssimazione nella posizione del punto in questi tre Problemi antecedenti, e specialmente nell'ultimo, è tale, che non si può desiderare di più. Per via degli archi trovati con essi Problemi si può in più maniere dividere una millesima di quadrante (§ 260) in dieci parti eguali, cioè in minuti primi della nuova divisione del cerchio.

266. Nella stessa guisa si potrebbe passare a divisioni più minute. Ma bisognerebbe impiegare tavole più copiose di cifre di quelle, che io ho generalmente impiegate nel calcolare le

dodici equazioni soprammentovate. Ciò si potrebbe fare , qualora l'uso richiedesse, che si spinga la divisione d'una circonferenza oltre i minuti primi del nuovo sistema Francese.

267. *Prob.* In un cerchio (fig. 101) di dato raggio  $AB$  trovare una corda  $Bb$  eguale prossimamente ad un quarto della circonferenza.

*Sol.* Si faccia nella circonferenza ad  $AB = BC = CD = DE$ . Quindi a  $BD = Ba = Ea$ . Col centro  $C$ , e col raggio  $Ca$  si segni un arco, che tagli la circonferenza in  $b$ . Sarà la  $Bb$  la corda cercata.



*Dim.* Supposto  $AB=1$ , si ponga  $BC=A=60^\circ$  nell'equazione (1); risulterà  $A' = 43^\circ 33' \frac{286}{2005} = Cb$ . Sarà dunque l'arco

$BCb = 103^\circ 33' \frac{286}{2005}$ . La sua metà  $51^\circ 46' \frac{1145}{1005}$  ha per seno 0,7855998. Sarà dunque la corda  $Bb = 1,5711996$ . Il quarto della circonferenza è poi  $= 1,5707963$ . L'errore dunque è di 0,0004 circa.

268. Secondo la proporzione di Archimede posto il raggio  $=1$ ; si trova il quarto della circonferenza  $= \frac{11}{7} = 1,5714$ . Dunque la costruzione di questo Problema (§ 267) dà un' approssimazione maggiore. Essendo questa costruzione semplicissima, sarà da usarsi in pratica a preferenza di altre, che potremmo aggiungere, che darebbero bensì una maggiore approssimazione teorica, ma sarebbero più complicate, e però più soggette ad errore.

269. *Prob.* In un cerchio (fig. 102) di dato raggio  $AB$  trovare l'arco eguale prossimamente allo stesso raggio.

*Sol.* Si faccia nella circonferenza  $BLCMFDOEd$  ad  $AB=BC$



$=CD=DE=Ed$ . Quindi  $aBD=Ba=Ea$ . Quindi ad  $Aa=BF=Db=db=aL$ . Quindi ad  $AB=FO$ . Quindi finalmente  $aBF=OM$ . Sarà l'arco  $LM$  eguale prossimamente al raggio.

*Dim.* Se nell'equazione (4) s'introduce  $A'=90^\circ$ , del quale arco è corda la  $aL$ ; risulterà  $BL=A=20^\circ$

$42' \frac{786}{1721}$ . Essendo poi  $OM=bF$

corda della quinta parte della circonferenza (§ 40), cioè di  $72^\circ$ , ed essendo l'arco  $FO=60^\circ$ ; sarà

l'arco  $FM=12^\circ$ . Quindi l'arco  $LM=BF-BL-FM=57^\circ 17' \frac{1035}{2721}=57^\circ 17' 43'' +$ . Si ha poi l'arco eguale al raggio, come è noto  $=57^\circ 17' 44''$ . Dunque ecc.

270. *Prob.* Trovare (fig. 103) il lato di un quadrato, che prossimamente sia eguale in area ad un cerchio di raggio dato  $AB$ .

*Sol.* Si faccia nella circonferenza  $BPCQDRE$  ad  $AB=BC=CD=DE$ , e collo stesso raggio  $BA$ , e coi centri  $B$  ed  $E$  si descrivano i due archi  $ALc$ ,  $AMd$ . Coi centri  $C$  e  $D$ , e col raggio  $DB$  si descrivano gli archi  $cNM$ ,  $dNL$ . Si faccia ad  $AN=BP=PQ$ ; quindi ad  $LM=QR$ . Sarà  $BR$  il lato cercato.

*Dim.* Se nel triangolo isoscele  $CND$  si suppone la base

$CD=1$  divisa per metà in  $\mu$ ; si avrà  $(CN)^2=(C\mu)^2+(N\mu)^2$ , cioè (§ 2)  $3=\frac{1}{4}+(N\mu)^2$ ; quindi  $N\mu=\frac{1}{2}\sqrt{11}$ . Si ha poi  $(CA)^2=(C\mu)^2+(A\mu)^2$ , e quindi  $A\mu=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ . Sarà dunque  $AN=\frac{1}{2}(\sqrt{11}-\sqrt{3})=0,7922869$ , che si trova essere corda di un arco  $=46^\circ 40' \frac{1272}{2071}$





272. Dato (fig. 104) il lato  $AB$  d' un quadrato , trovare il raggio di un cerchio, che gli sia prossimamente eguale in area.

*Sol.* Col raggio  $AB$ , centro  $A$  si descriva la circonferenza  $BCFDLPMEd$ . Si faccia ad  $AB=BC=CD=Ed$ . Col centro  $B$ , e col raggio  $BD$  si descriva l'arco  $dnNDa$ . Collo stesso raggio, e col centro  $E$  si tagli quest' arco in  $a$ . Si faccia ad  $Aa=BF=Db=db$ . Quindi ad  $AB=Dn=dN$ . Col centro  $C$ , e col raggio  $CN$  si tagli la circonferenza in  $P$ . Si faccia ad  $Nn=PM$ ; quindi ad  $Fb=CL$ . Sarà  $LM$  il lato cercato.

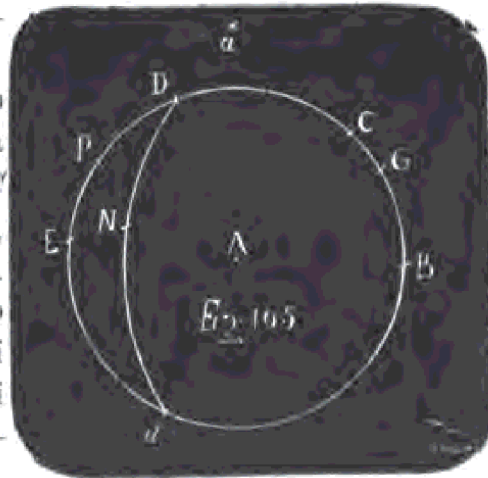
*Dim.* Se si supponga  $AB=1$ , avendo il triangolo  $BNd$  i lati rispettivamente eguali ai lati del triangolo  $BDL$  della fig. 103, si avrà  $\text{sen} \frac{1}{2} dBN = \frac{1}{6} \sqrt{3}$ ;  $\text{cos} \frac{1}{2} dBN = \frac{1}{6} \sqrt{33}$  (§ 271). Quindi  $\text{send}BN = 2 \text{sen} \frac{1}{2} dBN \cdot \text{cos} \frac{1}{2} dBN$  (§ 155)  $= \frac{1}{6} \sqrt{11}$ ;  $\text{cos} dBN = \sqrt{1 - \text{sen}^2 dBN} = \frac{5}{6}$ . Essendo poi  $CBd$  angolo retto (31, lib. III), sarà  $\text{cos} CBN = \text{send}BN = \frac{1}{6} \sqrt{11}$ . Ma si ha dalla Trigonometria  $(CN)^2 = (BC)^2 + (BN)^2 - 2BC \cdot BN \cdot \text{cos} CBN$ . Dunque  $CN = \sqrt{4 - 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{6} \sqrt{11}} = \sqrt{4 - \frac{1}{3} \sqrt{33}} = 1,4440025$ , che si trova essere corda di  $92^\circ 26' \frac{804}{2013} = CP$ . Essendo poi  $\text{sen} NBE = \frac{\frac{1}{2} Nd}{BN} = \text{sen}(CBE - CBN) = (\S 155) \text{sen} 60^\circ \text{cos} CBN - \text{cos} 60^\circ \cdot \text{sen} CBN = \frac{1}{2} \sqrt{3} \times \frac{1}{6} \sqrt{11} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$ ; sarà  $Nn = 2BN \times \text{sen} NBE = \frac{1}{6} (\sqrt{11} - 5\sqrt{3}) = 0,2149367$ , che si trova essere corda di  $12^\circ 20' \frac{946}{2892} = PM$ .

Sarà dunque l'arco  $CPM = 104^\circ 46' \frac{4220}{5821}$ , dal quale sottratto l'arco  $CL$ , che è una quinta parte della circonferenza (§ 40)  $= 72^\circ$ , resterà l'arco  $LM = 32^\circ 46' \frac{4220}{5821}$ , la corda del quale si trova  $= 0,5643274$ . Ora posto  $\pi$  il rapporto della circonferenza al diametro, ed  $R$  il raggio di un cerchio, si ha la sua area  $= \pi R^2$ , come è noto. Fatto dunque  $\pi R^2 = 1$ , che è l'area del quadrato di raggio  $AB=1$ , al quale si vuole eguale il cerchio, si avrà  $R = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ , e  $\log R = -\frac{1}{2} \log \pi = -0,2485749 = -1 + 0,7514251 = \log 0,5641896$ . Non si commetterà dunque l'errore di 0,0002.

273. *Prob.* Dato (fig. 105) il raggio  $AB$  d'una sfera, trovare

il lato di un cubo eguale prossimamente in solidità alla medesima.

*Sol.* Col raggio  $AB$ , centro  $A$  descritta la circonferenza  $BGCDPEd$ ; si faccia ad  $AB=BC=CD=DE=Ed$ . Col centro  $B$ , raggio  $BD$  si segni l'arco  $aDNd$ . Collo stesso raggio, e col centro  $E$  si tagli quest' arco in  $a$ . Si faccia ad  $AB=aG=dN$ . Quindi  $aCN=CP$ . Sarà  $PG$  il lato cercato.



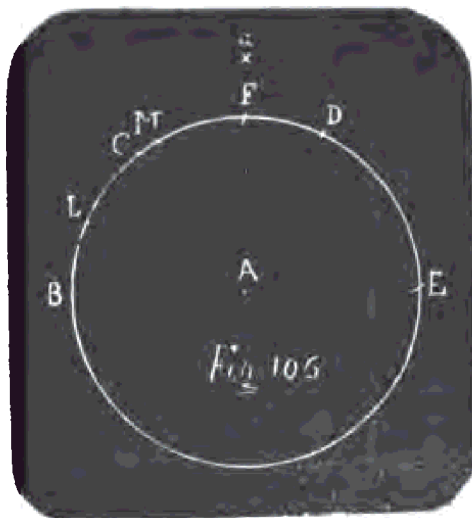
*Dim.* Poichè sarà (§ 272)  $CN$  corda di  $9^{\circ} 26' \frac{804}{2013}$ . Sarà poi

$GC=15^{\circ}$  (§ 32). Quindi  $PG=107^{\circ} 26' \frac{804}{2013}$ , del quale arco la corda si trova essere eguale a 1,6122696, supponendo  $AB=1$ . Ora nella stessa supposizione, e supposto il rapporto della circonferenza al diametro  $=\pi$ ; si ha la solidità della sfera  $=\frac{4}{3}\pi$ , e il suo logaritmo  $=\log 4 + \log \pi - \log 3 = 0,6220886$ , il di cui terzo 0,2073628 si trova essere logaritmo di 1,611991. Laonde l'errore che si commette, non arriva a 0,0003.

274. Dato (fig. 106) il lato  $AB$  di un cubo, trovare il raggio d'una sfera, che gli sia prossimamente eguale in solidità.

*Sol.* Col raggio  $AB$ , centro  $A$  si descriva la circonferenza  $BLCMFDE$ . Si faccia ad  $AB=BC=CD=DE$ . Quindi  $aBD=Ba=Ea$ ; quindi ad  $Aa=BF$ ; quindi ad  $Fa=FM$ , ad  $FA=FL$ . Sarà  $LM$  il raggio cercato.

*Dim.* Sarà l'arco  $FL=60^{\circ} 15$ , lib. IV). Si ha poi (posto  $AB=1$ )  $aF=Aa-AF=\sqrt{2}-1$  (§ 27)  $=0,4142136$ , che si trova



essere corda di  $23^{\circ} 54' \frac{976}{2846}$ . Sarà dunque l'arco  $LM = 36^{\circ} 5' \frac{1870}{2846}$ , il quale ha per corda 0,6195986. Ora essendo, come è noto, la solidità d'una sfera di raggio  $R$  espressa dalla formola  $\frac{4}{3}\pi R^3$ , fatto  $\frac{4}{3}\pi R^3 = 1$ , che è la solidità del dato cubo, si avrà  $\log R = \frac{\log 3 - \log 4 - \log \pi}{3} = -1 + 0,7926371 = \log 0,6203504$ . L'errore

dunque, che si commette per difetto, non arriva a 0,0008.

275. Tutte queste approssimazioni nella rettificazione, quadratura e cubatura della circonferenza, del cerchio e della sfera, e nei Problemi inversi, non lasciando errori di una millesima di raggio, si stimano essere sufficienti per la pratica. Chi ne volesse di più avanzate, non avrà a far altro, che trovare col calcolo di quale arco in gradi e minuti sia corda quella quantità lineare, che cerca; quindi ricavare questa corda dal cerchio dopo d'averlo diviso in quei gradi e minuti, che occorrono, adoperando i metodi dimostrati qui sopra (§§ 236 e 244).

276. *Prob.* Duplicare il cubo per approssimazione.

*Sol. I.* Sia (fig. 107)  $AB$  il lato del cubo, che si vuol duplicare. Col centro  $A$ , e col raggio  $AB$  descritta la circonferenza  $BQMNCFPDEdc$ , e fatto in essa ad  $AB = BC = CD = DE$ ; quindi a  $BD = Ba = Ea$ ; quindi ad  $Aa = BF$ ; quindi ad  $FA = FN$ ; sarà  $aN$  prossimamente il lato del cubo doppio.

*Dim.* Sarà l'arco  $BN$  una duodecima della circonferenza (§ 31)  $= 30^{\circ}$ . Se s'introduce quest'arco  $BN = A$  nell'equazione (1); l'arco  $A'$ , del quale è corda la

$aN$ , risulterà  $= 78^{\circ} 2' \frac{2358}{2846}$ . Si ha dunque (posto  $AB = 1$ )  $aN =$

$= 2 \sin 39^{\circ} 1' \frac{1179}{2846} = 1,2592800$ . Si ha poi  $\sqrt[3]{2} = 1,2599209$ . Non si

commette dunque un difetto di 0,0007.





*Sol. II.* Se si volesse un'esattezza maggio; fatta la costruzione della Soluzione I, e fatto inoltre ad  $AB=Ed=dc$ ; quindi ad  $Aa=BF=Db=db$ ; quindi ad  $aN=cM=MP$ ; quindi ad  $Fb=FQ$ ; sarà  $PQ$  il lato cercato con molto maggiore approssimazione.

*Dim.* Essendo per la dimostrazione della Soluzione I, l'arco  $cM=78^{\circ} 2' \frac{2358}{2846}=MP$ ; sarà l'arco  $cMP=146^{\circ} 5' \frac{1870}{2846}$ . Sottratto poi l'arco  $FQ=72^{\circ}$  (§ 40) dall'arco  $FBc=150^{\circ}$  (§§ 27, 29); resterà l'arco  $cQ=78^{\circ}$ , il quale sottratto dall'arco  $cMP$  lascerà l'arco  $QP=78^{\circ} 5' \frac{1870}{2846}$ ; la corda del quale si trova essere  $=1,2599190$ . Non si commetterà dunque, se non un difetto di 0,0000019, cioè di due millionesime di raggio appena.

277. *Prob.* Triplicare, quadruplicare ecc. il cubo fino alla ottuplicazione (fig. 108).

*Sol.* Sia  $AB$  il lato del cubo dato. Col raggio  $AB$ , e col centro  $A$  si descriva la circonferenza

$B\omega G\mu C\varepsilon \nu FLDOEdc$ . Si faccia in essa ad  $AB=BC=CD=DE=Ed=dc$ . Collo stesso raggio  $AB$ , e coi centri  $B, c, d, E, D$  si descrivano gli archi  $A\pi c, Aqd, c\beta A\delta E, A\pi d, A\tau E$ . Col raggio  $BD$ , centro  $B$  si descriva l'arco  $d\tau\delta Da$ ;

collo stesso raggio, e col centro  $E$  si tagli quest'arco in  $a$ . Collo stesso raggio, e coi centri  $C$  e  $D$  si descrivano gli archi  $cpqE, B\beta\pi d$ . Si faccia ad  $Aa=BF$ ; quindi ad  $AB=FO=aG=GL$ ; quindi ad  $EL=a\omega$ ; quindi a  $\pi\tau=B\varepsilon$ ; quindi a  $p\delta=B\mu$ ; a  $q\tau=\mu\nu$ . Si avrà

$aO$		duplo (§ 276)
$C\delta$	lato	triplo
$OG$	del	quadruplo
$O\omega$	cubo	quintuplo
$c\varepsilon$		sestuplo
$c\nu$		settoplo
$BE$		ottuplo.





*Dim.* Posto  $AB = 1$ ; si avrà (§ 272)  $C\delta = \sqrt{4 - \frac{1}{3}\sqrt{33}} = 1,4440033$ . Si ha poi  $\sqrt[3]{3} = 1,4422493$ . L'eccesso dunque non arriva a 0,002.

Essendo l'arco  $OFG = 105^\circ$  (§ 29, 30), sarà la sua corda  $OG = 2 \sin 52^\circ 30' = 1,5867066$ . Si ha poi  $\sqrt[3]{4} = 1,5874007$ . Il difetto dunque è di 0,0007 circa.

Sarà poi l'arco  $EL = \frac{5}{14}$  della circonferenza (§ 32)  $= 75^\circ$ . Se nell'equazione (4) s'introduce  $A' = 75^\circ$ ; risulta l'arco  $A = B\omega = 32^\circ 27' \frac{27}{2454}$ . Sarà dunque  $F\omega = 57^\circ 32' \frac{2427}{2454}$ . Quindi essen-

do  $FO = 60^\circ$  (15, lib. IV), sarà l'arco  $OF\omega = 117^\circ 32' \frac{2427}{2454}$ , che

ha per corda 1,7102744. Si ha poi  $\sqrt[3]{5} = 1,7099757$ . L'eccesso dunque non arriva a 0,0003.

Essendo  $BD = B\tau = D\pi = \sqrt{3}$  e  $D\tau = B\pi = 1$ ; sarà (§ 23)  $\pi\tau \cdot BD = (BD)^2 - (B\pi)^2$ ; cioè  $\pi \cdot \sqrt{3} = 2$ ; quindi  $\pi\tau = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1547005$ , che si trova essere corda di  $70^\circ 31' \frac{1725}{2375} = B\epsilon$ . Sarà dunque

l'arco  $cB\epsilon = 130^\circ 31' \frac{1725}{2375}$ , il quale ha per corda 1,8164964.

Si ha poi  $\sqrt[3]{6} = 1,8171204$ . Si commette dunque un difetto minore di 0,0007.

I due triangoli  $C\delta p$ ,  $Bp\delta$ , avendo i lati rispettivamente eguali, saranno eguali (8, 26 lib. I); ed essendo sulla stessa base  $p\delta$ , saranno tra le stesse parallele  $p\delta$ ,  $BC$  (39, lib. I). Sarà dunque l'angolo  $BC\delta = B\delta p$  (27, lib. I). Dunque  $\cos CB\delta = \frac{1}{3}\sqrt{11}$  (§ 272)  $= \cos B\delta p$ . Si ha poi dalla Trigonometria  $(Bp)^2 = (B\delta)^2 + (p\delta)^2 - 2B\delta \cdot p\delta \cos B\delta p$ ; ed essendo  $Bp = C\delta$ , poichè si determina colla stessa costruzione; si avrà  $4 - \frac{1}{3}\sqrt{33} = 3 + (p\delta)^2 - 2p\delta \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{11}$ ; quindi  $1 - \frac{1}{3}\sqrt{33} = (p\delta)^2 - p\delta \cdot \frac{1}{3}\sqrt{33}$ . Aggiungendo da una parte, e dall'altra dell'equazione il quadrato di  $\frac{1}{3}\sqrt{33}$ ; risulterà  $(1 - \frac{1}{3}\sqrt{33})^2 = (p\delta - \frac{1}{3}\sqrt{33})^2$ ; quindi  $p\delta - \frac{1}{3}\sqrt{33} = \pm(1 - \frac{1}{3}\sqrt{33})$ . Si ha poi (§ 23)  $p\delta \cdot dE = (dE)^2 - (pd)^2$ ; cioè  $p\delta = 1 - (pd)^2$ ; e quindi minore dell'unità; quindi si determinerà  $p\delta = \frac{1}{3}\sqrt{33} - 1 = 0,9148541$ , che si trova essere corda di  $54^\circ 26' \frac{1408}{2586}$ . Si ha poi  $q\tau = LM$  della Fig. 103 = alla corda dell'arco

$31^{\circ} 28' \frac{2518}{2799}$  (§ 270). Dunque l'arco  $cB_{\mu\nu} = 60^{\circ} + 54^{\circ} 26' \frac{1408}{2588} +$

$31^{\circ} 28' \frac{2513}{2799} = 145^{\circ} 55' \frac{1607}{1022}$ ; del quale arco si trova essere la

corda  $cv = 1,9122214$ . Si ha poi  $\sqrt[3]{7} = 1,9129309$ . Si commette dunque un difetto minore di 0,000702.

Si ha poi  $BE = 2 = \sqrt[3]{8}$ . Dunque ecc.

278. *Prob.* Sudduplicare il cubo prossimamente.

*Sol.* Sia  $AB$  il lato del cubo dato. (Fig. 108). Si descriva col centro  $A$ , raggio  $AB$  la circonferenza  $BCDEd$ , e si faccia ad  $AB = BC = CD = DE = Ed$ ; quindi col raggio  $BD$ , centro  $B$  si segni l'arco  $D\delta d$ . Col centro  $d$ , raggio  $dA$  si segni l'arco  $A\delta E$ . Sarà  $D\delta$  il lato cercato.

*Dim.* La  $D\delta$  di questa Figura è determinata come la  $dL$  della Fig. 103. Sarà dunque (§ 270)  $D\delta = 0,7922869$ . Ora si ha  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0,7937039$ . Si commette dunque un difetto minore di 0,002.

279. Non abbiamo voluto omettere le Soluzioni di questi due ultimi Problemi (§§ 277 278), benchè alcuni risultati contengano errori di una o di due millesime, e gli altri di qualche diecimillesima; perchè in molti casi tali errori riusciranno trascurabili, e dall'altra parte le Soluzioni ci sono sembrati semplici. Si potrebbero avere valori molto più esatti, qualora facesse d'uopo non solo per formare cubi nei rapporti espressi qui sopra, ma anche in altri, se si cercasse di qual arco espresso in gradi, minuti e parti di minuti sieno corde le radici cubiche, o le metà, terzi ecc. delle radici cubiche richieste alla costruzione del cubo cercato, e si ricavassero poi queste corde dal cerchio diviso appunto in gradi minuti ecc. (§§ 244, 245 ecc.), e s'impiegassero poi queste corde, o i loro multipli (§§ 64, 65) alla stessa costruzione del cubo.

280. E qui sia fine ormai a questa *Geometria del Compasso*, che se non dispiacerà ai Geometri, e se potrà in qualche modo servire agli Artisti, ai Disegnatori, e specialmente ai Divisori de' cerchj par gli usi Geografici ed Astronomici; io mi troverò della lunga noja divorata nel comporla abbastanza ricompensato.

---

## INDICE

---

Lorenzo Mascheroni e le sue opere matematiche . . .	Pag. III
A Bonaparte l'italico . . . . .	> 1
Prefazione . . . . .	> 3
LIBRO I. Preliminare . . . . .	> 11
> II. Della divisione della circonferenza e degli archi del cerchio . . . . .	> 19
> III. Della moltiplicazione e divisione delle di- stanze in linea retta . . . . .	> 31
> IV. Dell'addizione e sottrazione delle distanze; della situazione delle perpendicolari e delle parallele . . . . .	> 40
> V. Delle distanze proporzionali . . . . .	> 46
> VI. Delle radici . . . . .	> 51
> VII. Della intersezione delle rette cogli archi di cerchio e tra loro . . . . .	> 60
> VIII. Della costruzione, moltiplicazione e divi- sione degli angoli, e delle linee trigo- nometriche . . . . .	> 63
> IX. Delle Figure simili e dei poligoni regolari	> 68
> X. Dei centri . . . . .	> 82
> XI. Problemi varj. . . . .	> 86
> XII. Problemi per approssimazione . . . . .	> 120

